

Wolfgang Klein

Prognosen nach dem Prinzip
der exponentiellen Ausgleichung
für nichtsaisonale Zeitreihen
der Absatzwirtschaft
bei konstantem und linearem Trend

1969

1970

PROGNOSEN NACH DEM PRINZIP DER EXPONENTIELLEN AUSGLEICHUNG
FÜR NICHTSAISONALE ZEITREIHEN DER ABSATZWIRTSCHAFT
BEI KONSTANTEM UND LINEAREM TREND

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaft
durch die
Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität
zu Münster

vorgelegt von
Wolfgang Klein
aus Münster
1970



Erster Berichterstatter: Prof. Dr. Bleymüller

Zweiter Berichterstatter: Prof. Dr. Adam

Dekan: Prof. Dr. Seidenfus

Tag der mündlichen Prüfung: 9. Juli 1969

1. Aufgaben kurzfristiger Prognosen für die Absatzplanung	1
2. Der Begriff der Prognose und Grundbegriffe der Analyse von Zeitreihen	3
2.1 Der Begriff der Prognose	3
2.2 Der Begriff der Zeitreihe und des stochastischen Prozesses	4
2.3 Eigenschaften stochastischer Prozesse	7
2.4 Drei stationäre stochastische Prozesse	9
2.5 Ein Zufallswegprozeß	10
2.6 Die Theorie der Zeitreihenzerlegung	11
3. Probleme der Prognose ökonomischer Zeitreihen	16
3.1 Die Problematik der Analyse stochastischer Prozesse bei ökonomischen Zeitreihen	16
3.2 Das Verhältnis von Begriffen der Theorie der Zeitreihenzerlegung zu Begriffen der Theorie stochastischer Prozesse	18
3.3 Das Verhalten von Zeitreihenprozessen wirtschaftlicher Größen	23
3.4 Ein Zufallswegmodell für Güter mit konstantem Absatzverlauf	25
3.5 Ein Zufallswegmodell für Güter mit linear steigendem Absatzverlauf	26
4. Methoden der Prognose von Zeitreihen des Absatzes	29
4.1 Univariable und multivariable Prognosemethoden	29
4.2 Prognosen stationärer Prozesse	30
4.3 Die Ausgleichung von Zeitreihenwerten als Grundlage der Prognose nichtstationärer Prozesse	31
4.4 Die Ausgleichung aller Zeitreihenwerte mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate als Grundlage einer Prognose	32

4.5	Ausgleichung von Zeitreihen nichtstationärer Prozesse mit gleitendem Zeitintervall der Beobachtung	34
4.6	Gliederung der zu untersuchenden Prognoseverfahren	37
5.	Das Grundprinzip der exponentiellen Ausgleichung - Allgemeine Begründung und Eigenschaften -	39
5.1	Das allgemeine Zeitreihenmodell für einen konstanten Trend	39
5.2	Ausgleichung von Zeitreihen durch ungewogene gleitende Durchschnitte	40
5.3	Ausgleichung von Zeitreihen durch arithmetisch gewogene gleitende Durchschnitte	41
5.4	Ausgleichung von Zeitreihen durch geometrisch gewogene gleitende Durchschnitte	41
5.5	Ableitung des Grundprinzips der exponentiellen Ausgleichung	43
5.6	Der Einfluß der Größe des Ausgleichsparameters auf die Prognosen	45
5.7	Weitere Begründungen der exponentiellen Ausgleichung von Zeitreihen zum Zwecke der Prognose	48
5.8	Anfangswerte der exponentiellen Ausgleichung und ihre Problematik	53
6.	Eigenschaften von Prognosen auf der Grundlage der exponentiellen Ausgleichung für Zeitreihen mit absolut konstantem Trend	55
6.1	Das Zeitreihenmodell eines absolut konstanten Trends	55
6.2	Prüfung der Erwartungstreue der exponentiellen Ausgleichung bei absolut konstantem Trend	55
6.3	Prüfung der asymptotischen Erwartungstreue der exponentiellen Ausgleichung bei absolut konstantem Trend	58

6.4 Die Bestimmung des optimalen Ausgleichsparameters bei absolut konstantem Trend	61
7. Eigenschaften von Prognosen auf der Grundlage der exponentiellen Ausgleichung bei lokal konstantem Trend	64
7.1 Das Zeitreihenmodell eines lokal konstanten Trends	64
7.2 Prüfung der Erwartungstreue der exponentiellen Ausgleichung bei lokal konstantem Trend	65
7.3 Die Abhängigkeit der Anpassungsfähigkeit und Stabilität der exponentiellen Ausgleichung von der Größe des Ausgleichsparameters bei Strukturänderungen des Prozesses	66
7.4 Eine praktische Möglichkeit zur Bestimmung des Ausgleichsparameters	69
8. Eigenschaften von Prognosen auf der Grundlage der exponentiellen Ausgleichung bei konstantem Trend mit Zufallswegprozeß im Mittelwert	74
8.1 Allgemeine Eigenschaften von stochastischen Prozessen, für die die exponentielle Ausgleichung optimale Prognosen ergibt	74
8.2 Das Zeitreihenmodell eines konstanten Trends mit Zufallsweg im Mittelwert	81
8.3 Die Bestimmung des optimalen Ausgleichsparameters bei konstantem Trend mit Zufallsweg im Mittelwert	83
8.4 Bestimmung des Ausgleichsparameters der exponentiellen Ausgleichung durch Simulation	97
9. Eigenschaften von Prognosen auf der Grundlage der doppelten exponentiellen Ausgleichung bei absolut linearem Trend	98
9.1 Annahmen über die Struktur der Zeitreihe bei doppelter exponentieller Ausgleichung und damit verwandten Verfahren	98
9.2 Das Zeitreihenmodell eines absolut linearen Trends	100

9.3 Die Prognosemethode auf der Grundlage der doppelten exponentiellen Ausgleichung von Zeitreihen mit absolut linearem Trend	101
9.4 Die Gewichtung der Zeitreihenwerte bei doppelter exponentieller Ausgleichung	104
9.5 Die allgemeine Ableitung von Gewichten für die Ausgleichung von Zeitreihen mit absolut linearem Trend	108
9.6 Die Methode der exponentiell gewogenen kleinsten Quadrate als Kriterium der Koeffizientenschätzungen durch lineare Kombination der einfachen und doppelten exponentiellen Ausgleichung bei absolut linearem Trend	110
9.7 Die Bestimmung des optimalen Ausgleichsparameters bei absolut linearem Trend	114
10. Eigenschaften von Prognosen auf der Grundlage der doppelten exponentiellen Ausgleichung bei lokal linearem Trend	115
10.1 Das Zeitreihenmodell eines lokal linearen Trends	115
10.2 Prüfung der Erwartungstreue der doppelten exponentiellen Ausgleichung bei lokal linearem Trend	115
10.3 Empfehlungen für die praktische Bestimmung des Ausgleichsparameters	116
11. Eigenschaften von Prognosen auf der Grundlage anpassungsfähiger Prognoseverfahren bei linearem Trend mit Zufallsweg im Mittelwert	120
11.1 Allgemeine Abgrenzung der anpassungsfähigen Prognoseverfahren von der exponentiellen Ausgleichung bei linearem Trend	120
11.2 Zeitreihenmodell 1 eines linearen Trends mit Zufallsweg im Mittelwert	121
11.3 Zeitreihenmodell 2 eines linearen Trends mit Zufallsweg im Mittelwert	122

11.4	Ein anpassungsfähiges Prognoseverfahren für Zeitreihen mit linearem Trend	124
11.5	Allgemeine Eigenschaften von Prozessen, für die das anpassungsfähige Prognoseverfahren optimale Prognosen ergibt	126
11.6	Überprüfung der zweiten Differenzen der Zeit- reihenmodelle 1 und 2 auf ihr stochastisches Verhalten in der Zeit	131
11.7	Die Bestimmung der optimalen Ausgleichspara- meter des anpassungsfähigen Prognoseverfah- rens bei linearem Trend mit Zufallsweg im Mittelwert (Zeitreihenmodell 1)	135
11.8	Die Bestimmung der optimalen Ausgleichspara- meter des anpassungsfähigen Prognoseverfah- rens bei linearem Trend mit Zufallsweg im Mittelwert (Zeitreihenmodell 2)	142
12.	Die Bedeutung der Eigenschaften von Prognosen auf der Grundlage der exponentiellen Ausgleichung und dem als anpassungsfähiges Prognoseverfahren be- zeichneten System für die praktische Anwendung in der Unternehmung	146
Literaturhinweise		152

1. Aufgaben kurzfristiger Prognosen für die Absatzplanung

In einer freien Marktwirtschaft müssen die Unternehmungen durch eigene Bemühungen im Rahmen der betrieblichen Absatzwirtschaft sicherstellen, daß die von ihnen erstellten Leistungen vom Markt aufgenommen werden. Die unter solchen Bedingungen entstehenden Risiken zu vermindern und Chancen offenzulegen, ist das Ziel der Absatzplanung. Grundlage der Absatzplanung ist die Prognose der Nachfrage nach den Produkten der Unternehmung. Während langfristige Prognosen vornehmlich strategischen Entscheidungen über den Einsatz des absatzpolitischen Instrumentariums dienen, werden kurzfristige Prognosen überwiegend für die Aufstellung des Verkaufsplans durchgeführt.¹⁾

Dieser kurzfristige Absatzplan, der an den Absatzzielen der langfristigen Planung ausgerichtet ist, bildet eine Dispositionsgrundlage für die Planung der Produktion und des Lagers. Aus dieser Funktion der kurzfristigen Absatzplanung ergeben sich bestimmte Anforderungen, die ein in ihrem Rahmen zu verwendendes Prognoseverfahren zu erfüllen hat.²⁾

Werden von einer Unternehmung eine große Anzahl unterschiedlicher Güter produziert und sollen die Absatzmengen von jedem Produkt einzeln prognostiziert werden, dann muß das Verfahren in der Lage sein, eine Vielzahl von Prognosen so kostengünstig zu erstellen, daß der wirtschaftliche Vorteil

1) Vgl. E. GUTENBERG: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre. Band II: Der Absatz. 5. Auflage. Berlin: Springer-Verlag, 1962, S. 99 f.

2) Entspricht die Leistungsabgabe der Betriebsmittel einer Unternehmung ihren Maximalkapazitäten und sind die dabei produzierten Gütermengen dauernd kleiner als die maximal möglichen Absatzmengen, dann werden kurzfristige Nachfrageprognosen überflüssig, wenn man erwartet, daß sich diese Lage nicht ändert. Solche kurzfristigen Prognosen werden auch von solchen Unternehmungen nicht durchgeführt werden, deren Produktion ausschließlich auftragsorientiert ist.

der kurzfristigen Planung nicht durch die Prognosekosten überkompensiert wird. Aus dieser und der darüberhinausgehenden Forderung, daß eine große Anzahl von Prognosen in kurzfristig aufeinanderfolgenden Perioden schnell erstellt werden kann, resultiert, daß das Verfahren sich durch eine automatische Datenverarbeitungsanlage abwickeln läßt. Ein solches Prognoseverfahren wird umso kostengünstiger mit Hilfe der automatischen Datenverarbeitung durchgeführt werden können, je geringer der Umfang der für die Prognoseerstellung notwendigen Datenmenge ist. Kleine Dateien halten nämlich die Kosten der Datenträger gering und bringen außerdem eine entsprechend geringe zeitliche und quantitative Belastung der Datenverarbeitungsanlage mit sich. Ebenso wird ein für das Verfahren entworfenes Programm, das sich durch eine sparsame Belegung der Kernspeicherkapazität auszeichnet, einen günstigen Einfluß auf die Kosten der Prognoseerstellung haben, weil dadurch sowohl eine hohe Verarbeitungsgeschwindigkeit als auch eine zusätzliche Nutzung des internen Speichers ermöglicht wird.

Eine Klasse von Prognoseverfahren, die diesen Anforderungen, eine Vielzahl kurzfristiger Einzelprognosen mit genügender Genauigkeit und geringem Aufwand durchzuführen, genügen will, soll hier untersucht werden. Die Untersuchung soll sich auf Zeitreihen mit sogenanntem konstanten und linear ansteigendem Trend beschränken, also auf die Betrachtung von Zeitreihen mit einer ausgeprägten Saisonkomponente verzichten. An diesen beiden Zeitreihenmodellen soll der theoretische Hintergrund des Prognosesystems und der zu prognostizierenden Zeitreihen dargestellt werden. Dadurch können die charakteristischen Merkmale der Verfahren herausgehoben werden, die die Beurteilung ihrer praktischen Verwendbarkeit erleichtern können. Zunächst aber sollen die zu diesem Zweck benötigten statistischen Begriffe erläutert werden.

2. Der Begriff der Prognose und Grundbegriffe der Analyse von Zeitreihen

2.1 Der Begriff der Prognose

Der Begriff der Prognose soll hier so verstanden werden, wie er auch in ökonometrischen Modellen verwendet wird:¹⁾ Als Punktprognose wird die wertmäßig eindeutige Festlegung einer erwarteten Realisation einer Schätzfunktion bezeichnet.²⁾

Vom Standpunkt eines Bereichs von Beobachtungswerten aus, für den die Schätzfunktion aufgestellt wurde, kann die Bestimmung einer erwarteten Realisation außerhalb dieses Bereichs als Extrapolationsprognose bezeichnet werden. Da die hier zu besprechenden Modelle immer auf die Festlegung zukünftiger Werte einer bestimmten quantitativen Größe gerichtet sind, sollen unter dem Begriff Prognose immer Extrapolationsprognosen verstanden werden.

Zur Unterscheidung einer Prognose von einer Schätzung soll nur folgendes gesagt werden: Betrifft eine Prognose die erwartete Realisation einer Schätzfunktion, so hat im Gegensatz dazu eine Schätzung einen festen, aber unbekannten Verteilungsparameter oder eine Verteilungsfunktion zum Gegenstand.³⁾ Das Prognoseproblem ist mit dem Schätzproblem dann eng verbunden, wenn man die Verteilungsfunktion oder die Verteilungsparameter der zu prognostizierenden Größe nicht kennt, und man aufgrund von Beobachtungen zunächst Schätzungen über die Verteilungsfunktion und/oder ihre Parameter anstellen muß.

1) So z.B. in der Abhandlung von G. MENGES: Ökonometrische Prognosen. Statistische Hefte (Internationale Zeitschrift für Theorie und Praxis, Neue Folge), 2 (1967), 18-31, Fortsetzung: 87-98.

2) Vgl. G. MENGES: Grundriß der Statistik. Teil 1: Theorie. Opladen: Westdeutscher Verlag GmbH, 1968, S. 322.

3) Vgl. dieselbe Quelle wie 2), S. 322.

2.2 Der Begriff der Zeitreihe und des stochastischen Prozesses

Der statistischen Analyse von Daten aus der Absatzwirtschaft einer Unternehmung muß zunächst eine Einordnung dieser ökonomischen Größen in statistische Begriffskategorien vorangehen. Durch die Lagerbestandskontrolle, die Lagerbuchführung oder die Lagerstatistik werden die Periodenabsatzmengen in bestimmten Zeitpunkten festgestellt. Eine solche zeitliche Folge von quantitativen Daten nennt man eine Zeitreihe.¹⁾

Der Abstand zweier Zeitpunkte wird als Periode bezeichnet und in den folgenden Ausführungen immer mit einer Länge von einer Zeiteinheit - in der Praxis meistens ein Monat - angenommen.

Eine Zeitreihe ist univariabel, wenn sie zu jedem Zeitpunkt nur aus der Beobachtung einer einzigen Zufallsvariablen besteht, sie ist multivariabel, wenn sie sich aus Werten von mehreren Zufallsvariablen, die alle in aufeinanderfolgenden Zeitpunkten beobachtet wurden, zusammensetzt.²⁾ Unter dem Begriff einer Zufallsvariablen versteht man dabei eine reelle Funktion, die auf einer Menge von Elementarereignissen definiert ist.

Die Struktur des Umsatzprozesses einer Unternehmung bedingt es meistens, daß die Beobachtung der Absatzdaten der einzelnen Güter nur zu bestimmten, gleich weit auseinanderliegenden Zeitpunkten erfolgt. Diese Daten bilden dann die Summe der im Laufe einer Periode abgesetzten Mengen dieser Güter und werden, obwohl sie sich aus den laufenden täglichen Absatzmengen zusammensetzen, als eine einzige Beobachtung zu einem bestimmten Zeitpunkt aufgefaßt.³⁾ Die dadurch gewonnenen Werte gehören dann einer diskreten Zeitreihe mit äquidistanten Zeitpunkten an.

1) Vgl. N. WIENER: Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1949, S. 1.

2) Vgl. G.M. JENKINS und D.G. WATTS: Spectral Analysis and its Applications. San Francisco: Holden-Day, Inc., 1968, S. 142.

3) Bei Analysen und Prognosen, die sich auf Zeitreihen dieser Beobachtungen stützen, muß man sich stets bewußt sein, daß es sich um die Absatzmengen der Güter und nicht um ihre tatsächliche Nachfrage handelt.

Weitergehender und wichtiger ist die Feststellung, daß man eine Zeitreihe als eine Realisation eines stochastischen Prozesses bezeichnen kann.¹⁾ Die Betrachtung einer Zeitreihe unter diesem Gesichtspunkt ist für die Untersuchung von Prognoseverfahren notwendig. Die Berechtigung dieser Betrachtungsweise folgt aus den definitorischen Merkmalen eines stochastischen Prozesses.

Zunächst kann man die Beobachtung einer bestimmten Absatzmenge eines Gutes als Realisation einer Zufallsvariablen betrachten.

Obwohl zeitlich aufeinanderfolgende Beobachtungswerte ökonomisch einem bestimmten Gut zugeordnet werden können, können diese Beobachtungen statistisch als Realisationen unterschiedlicher Zufallsvariabler angesehen werden. Bei wirtschaftlichen Zeitreihen läßt sich diese Auffassung sogar sehr anschaulich begründen. Gerade dadurch, daß im ökonomischen Bereich die Beobachtungen nicht immer unter den gleichen Bedingungen erfolgen, sondern diese Bedingungen sich im Laufe der Zeit durch Variationen der Marktstruktur ändern, scheint die Annahme, daß es sich um Realisationen unterschiedlicher Zufallsvariabler mit unterschiedlichen Verteilungsfunktionen handelt, berechtigt zu sein.

Für die Definition eines Prozesses spielt es jedoch keine Rolle, ob die Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen unterschiedlich sind oder nicht. Eine Familie von Zufallsvariablen, die von einem Parameter t abhängen, der in einer reellen Zahlenmenge T variiert, ist ein stochastischer Prozeß.²⁾ Allgemein läßt sich das symbolisch wie folgt ausdrücken:

1) Vgl. G. MENGES: Grundriß der Statistik. Teil 1: Theorie, Loc. cit., S. 144.

2) Vgl. J.L. DOOB: Stochastic Processes. New York: John Wiley & Sons, Inc., Second Edition 1959, S. 46.

$$\{X_t, t \in T\} \quad (2.1)$$

Praktisch bedeutet T fast immer die Menge der Zeitparameter. Die Indizierung der Zufallsvariablen kann man auch so ausdrücken, daß man den Parameter t in Klammern hinter die Zufallsvariable setzt. $X(t)$ bedeutet dann dasselbe wie X_t , nämlich daß die Zufallsvariable $X(t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt gehört.

Ordnet man jedem Zeitpunkt aus einer abzählbar unendlichen Menge von diskreten Zeitpunkten $\{t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ eine Zufallsvariable X_t zu, die jeweils eine Verteilungsfunktion besitzt, so bildet die geordnete Menge von Zufallsvariablen

$$\{X_t\}, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.2)$$

einen diskreten stochastischen Prozeß, dessen Realisationen man Zeitreihe nennt.¹⁾ Die gemeinsame Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen für eine gegebene Menge von Zeitpunkten $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ schreibt man wie folgt:

$$P(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.3)$$

Von besonderem Interesse für die Analyse stochastischer Prozesse sind der Mittelwert, die Varianz und die Autokovarianzfunktion, die allgemein für eine Menge von Zeitparametern $\{t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ so definiert sind:²⁾

1) Vgl. G.M. JENKINS und D.G. WATTS: Loc. cit., S. 144.

2) Vgl. M. FISZ: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik (Hochschulbücher für Mathematik, herausgegeben von H. Grell, K. Maruhn und R. Rinow, Band 40, 3., durchgesehene Auflage), Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1965, S. 228.

a) Mittelwert

$$\mu_{X_t} = E(X_t) \quad , \quad (2.4)$$

b) die Varianz

$$\sigma_{X_t}^2 = E\{[X_t - E(X_t)]^2\} \quad , \quad (2.5)$$

c) und die Autokovarianzfunktion für ein beliebiges Zeitintervall h

$$\gamma_{X_t, X_{t+h}} = E\{[X_t - E(X_t)] [X_{t+h} - E(X_{t+h})]\} \quad . \quad (2.6)$$

2.3 Eigenschaften stochastischer Prozesse

Haben die zufälligen Veränderlichen des Prozesses X_t , $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, die Eigenschaft, daß ihre Verteilungsfunktionen identisch sind, so bezeichnet man den Prozeß als stationär im engeren Sinne.¹⁾ Für eine endliche Menge von Parametern $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ ²⁾ bedeutet das, daß die gemeinsame Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$ dieselbe ist, wie für die Variablen $X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h}$, die durch eine gleichmäßige Zeitverschiebung h den Zeitpunkten $\{t_1+h, t_2+h, \dots, t_n+h\}$ zugeordnet sind.

1) Vgl. J.L. DOOB: Loc. cit., S. 94.

2) In den folgenden Ausführungen soll diese endliche Menge von t-Werten immer ohne ihre ausdrückliche Erwähnung für alle mit t indizierten Größen gelten, wenn nicht hiervon durch andere Angaben abgewichen wird.

Die vorliegenden Beobachtungen eines Zeitprozesses erlauben es gewöhnlich nicht, die gemeinsamen mehrdimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilungen für eine bestimmte Menge von Zeitpunkten festzustellen. Leichter lassen sich dagegen die Momente der Verteilungen der jedem Zeitpunkt zugeordneten Zufallsvariablen bestimmen.

Besitzen die zufälligen Veränderlichen endliche Momente erster und zweiter Ordnung, dann nennt man den Prozeß stationär im weiteren Sinne, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:¹⁾

$$\mu_{X_t} = C_1 = \text{konstant}, \quad (2.7)$$

$$\sigma_{X_t}^2 = C_2 = \text{konstant}, \quad (2.8)$$

$$\gamma_{X_t, X_{t+h}} = \gamma(h) \quad . \quad (2.9)$$

Ein Prozeß, der stationär im weiteren Sinne ist, hat also einen konstanten Mittelwert und eine konstante Varianz. Außerdem hängt seine Autokovarianzfunktion nicht von der absoluten Zeit ab, sondern nur von der Zeitdifferenz h .

Die Autokovarianzfunktion wird häufig benutzt, um das Verhalten eines Prozesses im Zeitablauf zu untersuchen. Da die Autokovarianz aber durch das Maß der Zufallsvariablen beeinflusst wird, gebraucht man zu diesem Zweck besser die Autokorrelationsfunktion, die aus der durch die Standardabweichungen der Zufallsvariablen normalisierten Autokovarianzfunktion hervorgeht.²⁾

1) Vgl. M. FISZ: Loc. cit., S. 270.

2) Vgl. G.M. JENKINS und D.G. WATTS: Loc. cit., S. 146.

$$\rho_{X_t, X_{t+h}} = \frac{\gamma_{X_t, X_{t+h}}}{\sigma_{X_t} \sigma_{X_{t+h}}} \quad (2.10)$$

2.4 Drei stationäre stochastische Prozesse

Der reine Zufallsprozeß mit einem konstanten Erwartungswert und endlicher Varianz, der aus paarweise unabhängigen Zufallsvariablen besteht, und dessen Kovarianzen deshalb alle Null sind, ist der einfachste Fall eines stationären Prozesses.¹⁾

Aus einem solchen unkorrelierten Prozeß läßt sich durch eine gleitende lineare Kombination ein stationärer Prozeß erhalten, den man als Prozeß gleitender Durchschnitte bezeichnet²⁾. Ist Z_t ein reiner Zufallsprozeß, und ist $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ eine Menge reeller Zahlen, ergibt sich ein stationärer Prozeß gleitender Durchschnitte Y_t durch die Operation:

$$Y_t = a_1 Z_t + a_2 Z_{t-1} + \dots + a_n Z_{t-n-1} \quad (2.11)$$

Ein autoregressiver Prozeß ist der Typ eines unendlichen Prozesses gleitender Durchschnitte.³⁾ Bei praktischen Anwendungen kommt man jedoch mit einer endlichen Anzahl von Koeffizienten aus. Sind $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ reelle Zahlen, ist S_t ein stationärer Prozeß und Z_t ein reiner Zufallsprozeß, ergibt sich ein autoregressiver Prozeß wie folgt:⁴⁾

1) Vgl. G.M. JENKINS und D.G. WATTS: Loc. cit., S. 149.

2) Vgl. H. WOLD: A Study in the Analysis of Stationary Time Series. Uppsala: Almqvist & Wiksells, Second Edition 1954, S. 51.

3) Vgl. M.G. KENDALL und A. STUART: The Advanced Theory of Statistics. Volume III: Design and Analysis, and Time-Series. London: Charles Griffin & Company Ltd., Second Edition 1968, S. 417.

4) Dieselbe Quelle wie 3), S. 416.

$$S_t = -b_1 S_{t-1} - b_2 S_{t-2} - \dots - b_m S_{t-m} + Z_t \quad (2.12)$$

Statt in dieser anschaulichen Form schreibt man ihn jedoch auch so:

$$Z_t = S_t + b_1 S_{t-1} + b_2 S_{t-2} + \dots + b_m S_{t-m} \quad (2.13)$$

2.5 Ein Zufallswegprozeß

Aus einem reinen Zufallsprozeß kann man auch ein einfaches Modell eines nicht stationären Prozesses ableiten. Ist Z_t ein stationärer Prozeß mit konstantem Mittelwert und endlicher Varianz von unkorrelierten Zufallsvariablen, und durchläuft der Zeitparameter die Folge von 1, 2, ..., t, so läßt sich ein sogenannter Zufallswegprozeß X_t wie folgt gewinnen:¹⁾

$$X_1 = Z_1 \quad (2.14)$$

$$X_2 = Z_1 + Z_2 = X_1 + Z_2 \quad (2.15)$$

.

.

.

$$X_t = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_t = X_{t-1} + Z_t \quad (2.16)$$

Dieser Prozeß X_t ist nicht stationär, da sein Mittelwert und seine Varianz zeitabhängig sind. Bezeichnet man den Erwartungswert von Z_t mit μ_{Z_t} und die Varianz entsprechend mit $\sigma_{Z_t}^2$, dann zeigt sich die Zeitabhängigkeit des Prozesses X_t durch die Bestimmung seines Mittelwertes μ_{X_t} und seiner Varianz $\sigma_{X_t}^2$:

1) Vgl. G.M. JENKINS und D.G. WATTS: Loc. cit., S. 152.

$$\mu_{X_t} = t \mu_{Z_t} \quad (2.17)$$

$$\sigma_{X_t}^2 = t \sigma_{Z_t}^2 \quad (2.18)$$

2.6 Die Theorie der Zeitreihenzerlegung

Bevor eine Einteilung von möglichen stochastischen Prozessen, die den Zeitreihen von Absatzmengen zugrundegelegt werden können, versucht werden soll, soll zunächst ein Instrument ihrer Analyse, die sogenannte Zeitreihenzerlegung betrachtet werden.

Zeitreihen wirtschaftlicher Größen zeigen meistens einen sehr unregelmäßigen Verlauf, lassen aber gleichzeitig doch über längere Zeiträume in einer bestimmten Bandbreite schwankende, systematische Änderungen ihrer Gesamtstruktur erkennen. Durch die Zerlegung der Zeitreihe in verschiedene Teile kann man versuchen, die charakteristischen zeitlichen Änderungstendenzen voneinander zu trennen. Die Bestimmung solcher Teile einer Zeitreihe erfolgt aufgrund einer Einteilung der Einflußfaktoren der wirtschaftlichen Größe in möglichst homogene Gruppen.¹⁾ Daraus ergeben sich für die Zeitreihenzerlegung bestimmte Reihenkomponenten, die eben aufgrund ihrer wirtschaftlich verschiedenen Ursachen einen typischen Bewegungscharakter haben, den man durch ein Modell erfassen kann.

Allgemein wird die Zeitreihenzerlegung meistens in der folgenden Form dargestellt:²⁾

$$X_t = G_t + P_t + Z_t \quad (2.19)$$

1) Vgl. O. ANDERSON: Probleme der statistischen Methodenlehre in den Sozialwissenschaften. 3. Auflage. Würzburg: Physika-Verlag, 1957, S. 165.

2) Vgl. K. WEICHSELBERGER: Über eine Theorie der gleitenden Durchschnitte und verschiedene Anwendungen dieser Theorie. Metrika, 8 (1964), 185.

Die Zeitreihenwerte X_t ergeben sich aus der Addition von drei verschiedenen Komponentengrößen:

G_t = sogenannte glatte Komponente,

P_t = Saisonkomponente und

Z_t = irreguläre Komponente.

Durch diese Darstellung wird ein multiplikatives Modell insofern eingeschlossen, als die Summanden transformierte Größen einer multiplikativen Verknüpfung sein können.

a) die glatte Komponente

Die G_t werden als Werte einer "glatten" Komponente aufgefaßt, die ihrerseits aus den Werten der Einzelkomponenten, Trend und Konjunkturzyklus, zusammengesetzt ist. Die Ausprägung von Konjunkturzyklen in Zeitreihen wird sich nur bei Beobachtungen über sehr lange Zeiträume nachweisen lassen. Wichtiger für die Analyse der Zeitreihen des Absatzes ist die Auffassung, daß in ihrer Bewegung eine glatte Komponente, die sogenannte Trendkomponente, enthalten ist, deren Ursache in einer gleichmäßigen Bewegung des Systems über eine Reihe von Jahren gesehen werden kann.¹⁾ Um die Trendkomponente, die diese Bewegung für ausreichend lange Zeitintervalle repräsentiert, beschreiben zu können, wird häufig ein Polynom mit dem Argument der Zeit gewählt. Hat man die Ordnung des Polynoms für das betrachtete Zeitintervall gewählt, dann gelangt man z.B. zu der folgenden Form:

$$G_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n. \quad (2.20)$$

Da Trend im hier verstandenen Sinne die Beschreibung der allgemeinen Tendenz in der Größenänderung der Zeitreihenwerte

1) Vgl. M.G. KENDALL und A. STUART: Loc. cit., S. 349.

bedeutet, soll ein über ein bestimmtes Zeitintervall konstanter Verlauf auch als Trend bezeichnet werden. Verläuft die Grundströmung der Zeitreihe ohne zu steigen oder zu fallen, dann läßt sich dieser zeitunabhängige Trend durch ein Polynom vom Grade Null beschreiben. Dieses Modell in der Schreibweise

$$G_t = a \quad (2.21)$$

wird in den nachfolgenden Ausführungen als konstanter Trend bezeichnet.¹⁾

Ein linearer Trend liegt vor, wenn die Abhängigkeit der Trendkomponente von der Zeit durch ein Polynom vom Grade 1 dargestellt werden kann. Aus der Darstellung

$$G_t = a + b t \quad (2.22)$$

läßt sich erkennen, daß der Wert der Trendkomponente, den man in allen Zeitreihenwerten vorfindet, sich linear mit der Zeit ändert. Die Darstellung eines quadratischen Trends erreicht man durch ein Polynom, welches die unabhängige Variable in quadratischer Form enthält.

b) Die Saisonkomponente

Obwohl hier Untersuchungen über Zeitreihen mit saisonalen Schwankungen ausgeschlossen sind, soll doch die Saisonkomponente wegen ihrer engen begrifflichen Verbindung zur Trendkomponente kurz erläutert werden. Wie der Trend zeigt auch

¹⁾ Die Indizierung der Koeffizienten zu ihrer Unterscheidung wird hier fallengelassen, um dafür die in den weiter unten abgehandelten Modellen vorkommenden beiden Koeffizienten mit a und b zu bezeichnen.

die Saisonkomponente eine systematische Bewegung im Zeitablauf. Schon ihr Name drückt aus, daß es sich um einen Teil der Zeitreihe handelt, dessen Zustände in regelmäßigen Zeitabständen, meist mit einer Periode von einem Jahr, annäherungsweise gleich oder genau in gleicher Weise wiederkehren.¹⁾ Durch ihre charakteristische Eigenschaft der Periodizität ist sie meistens gut zu erkennen.

Ob die additive Überlagerung eines Trends durch eine Saisonkomponente als richtig angenommen werden kann, oder ob die Saisonkomponente proportional mit der Größe des Trendwertes variiert, muß im Einzelfall beim Vorliegen von Absatzzeitreihen von Saisonartikeln geprüft werden. Im letzten Fall käme eine multiplikative Verknüpfung der beiden Bestandteile der Zeitreihe in Frage. Trendkomponente und Saisonkomponente sind systematische Komponenten, auch Strukturkomponenten genannt.

c) Die irreguläre Komponente

Der Rest der Zeitreihe, der nach Elimination der systematischen Komponenten Trend und Saison gewonnen wird, ist die irreguläre Komponente. Enthält die Zeitreihe kurzfristige systematische Bewegungen, die weder durch den Trend noch durch die Saisonkomponente erklärt werden, dann wird sich diese Komponente als oszillativer Teil der irregulären Komponente widerspiegeln.²⁾

Entscheidender ist jedoch für die nachfolgenden Modellbetrachtungen der Bestandteil der irregulären Komponente, der

1) Vgl. M.G. KENDALL und A. STUART: Loc. cit., S. 396.

2) Dieselbe Quelle wie 1), S. 350.

als Zufallsvariable betrachtet wird. Oszillation und Zufallskomponente kann man unter dem Begriff "Fluktuation" zusammenfassen.¹⁾

Ob es tatsächlich gelungen ist, mit Hilfe eines Modells den systematischen Teil der Zeitreihe genau genug zu beschreiben, läßt sich nach der Anwendung des Modells auf die Beobachtungswerte durch Überprüfung der Zeitreihe der Residuen auf ihren Zufallscharakter feststellen. Häufig wird angenommen, daß die Residuen mit einem Mittelwert von Null und endlicher Varianz normal verteilt sind. Diese Annahme kann z.B. aus dem zentralen Grenzwertsatz resultieren. Danach ist eine Zufallsvariable asymptotisch normalverteilt, die von zahlreichen Faktoren, die jeder für sich nur einen kleinen Einfluß ausüben, beeinflußt wird.²⁾

Ist die gemeinsame Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen für jede Menge von Zufallsvariablen $\{X_t; t_1, t_2, \dots, t_n\}$ des Prozesses normal verteilt, dann nennt man ihn einen Gauss-Prozeß.³⁾ Ein Gauss-Prozeß ist stationär im engeren Sinne, wenn sein Mittelwert und seine Varianz konstant sind. Das folgt aus der Tatsache, daß Mittelwert und Varianz eine Normalverteilung vollkommen bestimmen.⁴⁾

1) Vgl. M.G. KENDALL und A. STUART: Loc. cit., S. 350.

2) Vgl. G. MENGES: Grundriß der Statistik. Teil 1: Theorie. Loc. cit., S. 250.

3) Vgl. J.L. DOOB: Loc. cit., S. 71.

4) Dieselbe Quelle wie 3), S. 95.

3. Probleme der Prognose ökonomischer Zeitreihen

3.1 Die Problematik der Analyse stochastischer Prozesse bei ökonomischen Zeitreihen

Eine für die Auswahl eines Prognoseverfahrens notwendige Beschreibung der zu prognostizierenden stochastischen ökonomischen Größen bezüglich ihres Verhaltens in der Zeit baut meistens auf der Theorie der Zeitreihenzerlegung auf. Oft reichen die durch sie angegebenen Kriterien der unterschiedlichen Bewegungskomponenten dazu aus, ein für praktische Zwecke ausreichend genaues, einfaches Verfahren zur Analyse und Prognose von Zeitreihen angeben zu können. Will man jedoch diese Verfahren auf ihre theoretischen Eigenschaften untersuchen, genügen häufig die Aussagen der Zeitreihenzerlegung über die Struktur der Zeitreihe nicht, um mit statistisch theoretischen Kriterien eine solche Beurteilung der Methoden durchzuführen. Insbesondere liefert die rein formale Charakterisierung einer Zeitreihe durch eine Komponentenzerlegung häufig nicht in ausreichendem Ausmaß die Informationen, die zum Erkennen der den Zeitreihen zugrundeliegenden stochastischen Prozesse notwendig sind. Erst durch die Angabe der charakteristischen Merkmale eines stochastischen Prozesses, dessen Realisationen in Form von Zeitreihen vorliegen, erhält man die Mittel, um die Anwendbarkeit eines Prognoseverfahrens in einer dadurch genauer beschriebenen Situation richtig zu beurteilen.

Das bedeutet nicht, daß man auf die Zeitreihenzerlegung verzichten kann, um in jedem Falle sofort von einem bestimmten Prozeß ausgehend ein Prognosesystem aufzubauen. Wenn man sich nämlich bei der Suche nach geeigneten Schätzfunktionen,

die zum Zwecke der Prognose extrapoliert werden sollen, an den Eigenschaften eines Prozesses orientieren will, so stößt man bei wirtschaftlichen Größen auf besondere Schwierigkeiten.

Eine Schwierigkeit liegt bei Zeitreihenbeobachtungen ökonomischer stochastischer Prozesse darin, daß die aus der Vergangenheit vorliegenden für jeden Zeitpunkt einzigen Realisationen eines Prozesses dazu ausreichen müssen, um Aussagen über seine Verteilungsfunktion und ihre Parameter machen zu können. Man kann diese Aussagen nur auf diese Beobachtungen stützen, weil man nicht in der Lage ist, den gleichen Prozeß an demselben Zeitpunkt noch einmal in Gang zu setzen und neue Beobachtungen unter genau denselben Bedingungen zu gewinnen.¹⁾

Eine weitere Schwierigkeit tritt durch das nichtstationäre Verhalten der Prozesse, das meistens bei wirtschaftlichen Zeitreihen unterstellt werden muß, noch hinzu. Faßt man die Menge der im Zeitablauf beobachteten Zeitreihenwerte als eine Stichprobe auf,²⁾ so erkennt man, daß sich bei laufender Ziehung von Stichproben aus einem nichtstationären Prozeß die Verteilung der Zufallsvariablen dauernd verändert. Ändert sich aber die Wahrscheinlichkeitsfunktion, dann ändert sich damit auch die Verteilung der Stichprobenfunktionen, die als Schätzfunktionen der Parameter des Prozesses dienen können.

Die Zeitreihenzerlegung bietet in solchen Situationen in anschaulicher Form Hinweise auf den Mittelwert und die Varianz eines Prozesses. Es soll deshalb versucht werden, eine Beziehung zwischen den bei der Zeitreihenzerlegung und den in der Theorie stochastischer Prozesse verwendeten Begriffen herzustellen.

1) Vgl. M.D. GODFREY: The statistical analysis of stochastic processes in economics. Kyklos, 20 (1965), 377.

2) Vgl. T. YAMANE: Statistics: An Introductory Analysis. 2nd Edition, New York: Harper and Row, 1967, S. 363.

3.2 Das Verhältnis von Begriffen der Theorie der Zeitreihen- zerlegung zu Begriffen der Theorie stochastischer Prozesse

Durch die Zeitreihenzerlegung wird unterstellt, daß die Zeitreihenwerte um eine deterministische Funktion normal verteilt sind. Das bedeutet, daß die Zeitreihenwerte aus einer Addition von deterministischen Größen, die man auch als "wahre" Werte bezeichnet, und den Realisationen unabhängiger Zufallsvariabler hervorgehen.

Geht man von einer Prozeßanalyse bei der Betrachtung einer Zeitreihe aus, so ist man daran interessiert, den Mittelwert und die Varianz des zugrundeliegenden Prozesses zu schätzen. Bei nichtstationären Zeitreihen kann man darüber hinaus versuchen, die zeitlich bedingten Veränderungen einer Verteilungsfunktion durch die Darstellung ihrer Parameter als eine Funktion der Zeit zu beschreiben. Unter diesem Gesichtspunkt handelt es sich jedoch nicht um die Bestimmung von "wahren" Werten, sondern aufgrund der stochastischen Natur des Prozesses entsprechend um Erwartungswerte.¹⁾

Geht man jedoch von der Annahme aus, daß die Zeitreihe durch eine Überlagerung der beiden deterministischen Funktionen der Zeit, der glatten Komponente und der Saisonkomponente, durch den stationären Gauss-Prozeß Z_t zustande kommt, dann läßt sich der Zeitreihenprozeß wie folgt darstellen:

$$X_t = G_t + P_t + Z_t . \quad (3.1)$$

Bildet man den Erwartungswert des Prozesses, dann erhält man die Beziehung:

1) Vgl. G. MENGES: Grundriß der Statistik. Teil 1 : Theorie. Loc. cit., S. 212.

$$E(X_t) = E(G_t + P_t + Z_t) \quad . \quad (3.2)$$

Da G_t und P_t deterministische Funktionen sind, ergibt sich daraus der Ausdruck¹⁾:

$$E(X_t) = G_t + P_t + E(Z_t) \quad . \quad (3.3)$$

Da der Mittelwert des normalverteilten Zufallsprozesses voraussetzungsgemäß gleich Null ist, folgt für den Erwartungswert von X_t :

$$E(X_t) = \mu_{X_t} = G_t + P_t \quad . \quad (3.4)$$

Die Varianz des Prozesses läßt sich aus der allgemeinen Grundbeziehung

$$\sigma_{X_t}^2 = E\{[X_t - E(X_t)]^2\} \quad (3.5)$$

ableiten. Setzt man den Prozeß X_t in der Form (3.1) und seinen Erwartungswert (3.3) in diesen Ausdruck ein, dann erhält man:

$$\sigma_{X_t}^2 = E\{[G_t + P_t + Z_t - (G_t + P_t + E(Z_t))]^2\} \quad . \quad (3.6)$$

Daraus ergibt sich weiter:

$$\sigma_{X_t}^2 = E\{[Z_t - E(Z_t)]^2\} \quad . \quad (3.7)$$

Man erkennt, daß auf der rechten Seite dieser Gleichung die Varianz der irregulären Komponente erscheint. Es

1) Vgl. G. MENGES: Grundriß der Statistik. Teil 1: Theorie. Loc. cit., S. 213.

gilt deshalb der Zusammenhang:

$$\sigma_{X_t}^2 = \sigma_{Z_t}^2 \quad (3.8)$$

Die Varianz des Zeitreihenprozesses ist also unter den gegebenen Voraussetzungen der Varianz der irregulären Komponente gleich.

Aus diesen Zusammenhängen heraus mag es als berechtigt erscheinen, von in der Zeitreihe enthaltenen "wahren" Werten zu sprechen,¹⁾ wenn damit die Funktionen der systematischen Komponenten gemeint sind, die zusammen, wie aus (3.4) ersichtlich ist, den Erwartungswert des Prozesses bilden.

Legt man bei der Zeitreihenzerlegung die systematische Komponente durch eine bestimmte Funktionalform, etwa durch ein Polynom der Zeit oder eine Fourierreihe fest, dann hat man damit gleichzeitig eine wichtige Entscheidung über die vermutliche Abhängigkeit des Mittelwertes des Prozesses von der Zeit getroffen. Es muß jedoch betont werden, daß bei der Zerlegung wirtschaftlicher Zeitreihen diese Annahmen wegen der weitgehend unbestimmbaren Dynamik wirtschaftlicher Größen bewußt nur für einen ganz bestimmten zeitlich begrenzten Abschnitt einer Zeitreihe trifft, und daß es sich dabei streng genommen um die mathematische Bestimmung einer Funktion handelt.²⁾

Unterstellt man beispielsweise einer Zeitreihe für eine bestimmte Anzahl von Perioden einen konstanten Trend, der durch die irreguläre Komponente mit den oben bezeichneten Eigenschaften überlagert wird, dann ist damit gleichzeitig fest-

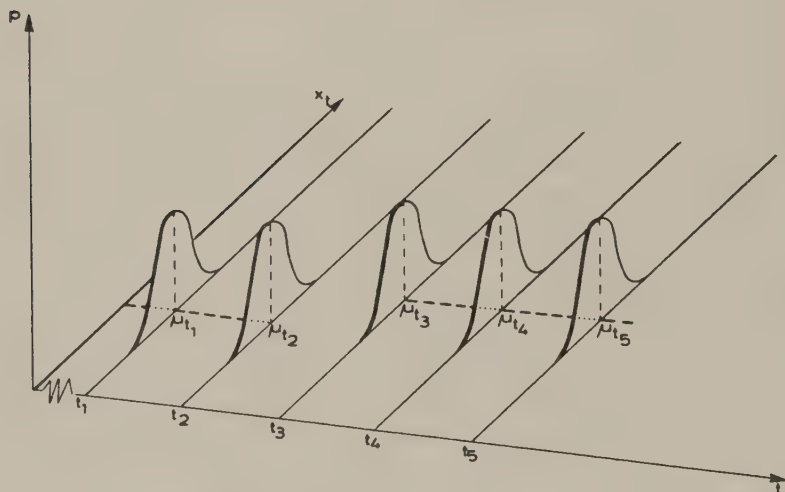
1) Vgl. J. JOHNSTON: Econometric Methods. New York: McGraw-Hill Book Co. Inc., 1963. S. 148.

2) Vgl. K. WEICHSELBERGER: Über eine Theorie der gleitenden Durchschnitte und verschiedene Anwendungen dieser Theorie. Metrika, 8 (1964), 185.

gestellt, der im Zeitpunkt t_3 eine Verschiebung in seinem Mittelwert um einen bestimmten Betrag aufweist.

Abbildung 1:

Prozeß mit konstantem Trend



Diese Verschiebung im Mittelwert des Prozesses prägt sich möglicherweise in der Zeitreihe als ein Strukturbruch aus. Obwohl der Trend eine wesentliche Veränderung dadurch erfährt, soll ungeachtet der Tatsache, daß der Prozeß im Bereich von t_1 bis t_2 und von t_3 bis t_5 stationär, über alle Zeitpunkte betrachtet jedoch nichtstationär verläuft, in diesem Fall von einem konstanten Trend gesprochen werden.

Dieselben Überlegungen kann man auch für andere Möglichkeiten des tendenziellen Verlaufs der Strukturkomponente anstellen. Innerhalb der durch die Angabe des Strukturtyps der Zeitreihe geschaffenen Gruppen soll dann eine feinere Untergliederung

der den Zeitreihen zugeordneten Prognosesysteme mit Hilfe von Merkmalen stochastischer Prozesse durchgeführt werden.

3.3 Das Verhalten von Zeitreihenprozessen wirtschaftlicher Größen

Unter dem Gesichtspunkt möglicher Strukturveränderungen lassen sich weitere allgemeine Aussagen über die Natur von Zeitreihenbeobachtungen aus dem Absatzbereich einer Unternehmung machen. Während die Annahme über den Einfluß vieler unabhängiger Zufallsgrößen auf die Verteilung der Absatzmengen eines Gutes im Sinne des zentralen Grenzwertsatzes realistisch erscheint,¹⁾ so daß man jede beobachtete Absatzmenge als Realisation einer asymptotisch normalverteilten Zufallsvariablen betrachten kann, scheint, wie schon angedeutet, die Annahme, daß der Prozeß, zu dem diese Zufallsvariablen gehören, einen konstanten Mittelwert und auch eine konstante Varianz aufweist, nicht der Wirklichkeit zu entsprechen. Der dauernde Wandel wichtiger Einflußfaktoren des Wirtschaftslebens bedingt eine zum Teil regelmäßige Verschiebung der Parameter der Verteilungsfunktionen der Prozesse. Daraus läßt sich schließen, daß solche Prozesse nicht stationär sind.

Bezieht man sich bei dieser Feststellung speziell auf den Mittelwert und die Varianz, läßt sich dadurch eine allgemeine Gruppierung von Prognosemodellen gewinnen. Eine einfache Annahme über das Verhalten eines Prozesses im Zeitablauf wird einem Prognosemodell dadurch vorangestellt, daß man zwar grundsätzlich einen nichtstationären Verlauf unterstellt, ihn kurzfristig jedoch als stationär betrachtet. Diese Hypothese ist brauchbar, wenn man ein genügend kurzes Zeitintervall betrachtet, in dem eine langsame Änderung der Struk-

1) Kritik siehe G. MENGES: Grundriß der Statistik. Teil 1: Theorie. Loc. cit., S. 248 f.

tur des Prozesses nur wenig spürbar wird, und das gleichzeitig ausreicht, um einen ausreichenden Genauigkeitsgrad der Prognose zu gewährleisten. Das bedeutet unter Berücksichtigung der Zeitreihenzerlegung, daß ein konstanter Trend in diesem Zeitintervall vorliegt, und die irreguläre Komponente die Realisation eines stationären Prozesses ist.

Verändert sich die Varianz eines stochastischen Prozesses nicht, unterliegt jedoch sein Mittelwert einer ständigen Veränderung, so kann man ihn als nichtstationär im Mittelwert bezeichnen.¹⁾ Ein solches Verhalten kann dadurch charakterisiert werden, daß die Zeitreihe einen steigenden oder fallenden Trend aufweist.

Bezüglich der Absatzmengen der einzelnen Güter einer Unternehmung ist neben der dauernden Änderung des Mittelwertes auch mit einer laufenden Veränderung ihrer Streuung zu rechnen.

Aus den letzten beiden Punkten geht hervor, daß das nichtstationäre Verhalten eines Prozesses in mehreren seiner Parameter ausgedrückt werden kann. In den nachfolgenden Untersuchungen werden vor allem nichtstationäre Prozesse mit diskreter Zeit von Interesse sein, deren Parameter sich nicht nach einer deterministischen Funktion der Zeit entwickeln, sondern zufälligen, eventuell sogar schockartigen Veränderungen unterliegen. Rein theoretisch wurde ein solcher Typ bereits durch den Zufallswegprozeß vorgestellt.²⁾ Es soll jetzt versucht werden, ein solches stochastisches Verhalten auf den konkreten Fall der Absatzmengen eines Gutes zu übertragen.

1) Vgl. G.M. JENKINS und D.G. WATTS: Loc. cit., S. 151.

2) Vgl. hierzu Abschnitt 2.5 "Ein Zufallswegprozeß".

3.4 Ein Zufallswegmodell für Güter mit konstantem Absatzverlauf

Aus den Bedingungen stationärer Prozesse geht hervor, daß Zeitreihenprozesse, deren Mittelwert und Varianz im Zeitablauf nicht konstant sind, nicht stationär sind. Ein einfaches und der Realität nahekommendes Modell eines nichtstationären Prozesses der Absatzmengen einer Unternehmung ergibt sich aus den folgenden Überlegungen:

Die Zeitreihe eines bestimmten Artikels wird über eine gewisse Anzahl von Perioden (z.B. Monate oder Jahre) eine allgemeine konstante, steigende oder fallende Tendenz der Nachfrage nach diesem Gut widerspiegeln. Zeigt sich ein relativ stabiler konstanter Verlauf, der jedoch in unregelmäßigen Abständen parallel verschoben zu sein scheint, dann mag man annehmen, daß die wahre Nachfrage nach diesem Gut in ihrem Trendtyp zwar unverändert bleibt, die Struktur jedoch zufälligen unabhängigen Verschiebungen unterliegt. Sind diese Verschiebungen relativ gering, kann der Verlauf des Absatzes, der aufgrund der wahren Nachfrage nach dem Gut zustande kommt, als ein Zufallswegprozess interpretiert werden.¹⁾ Es muß jedoch betont werden, daß diese Wanderung des Prozesses langsam vor sich geht, so daß die Zu- oder Abnahme des Niveaus des Prozesses von Periode zu Periode unerheblich ist.²⁾

In einem Modell für den Zeitreihenprozeß eines bestimmten Gutes, dessen wahre Nachfrage als a_t bezeichnet wird, kann man das wie folgt festhalten:

$$a_t = a_{t-1} + Y_t \quad (3.9)$$

1) Vgl. P.J. HARRISON: Exponential smoothing and short-term sales forecasting. Management Science, 13 (1967), 823.

2) Vgl. R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series. 2nd Printing. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1964, S. 95.

Zum Zeitpunkt t ist die wahre Nachfrage a_t nach dem Gut gleich der wahren Nachfrage nach diesem Gut in der vorherigen Periode, vermehrt (oder vermindert) um eine zufällige Größe Y_t . Für den Prozeß der Zufallsvariablen Y_t wird angenommen, daß er einen konstanten Mittelwert von Null und eine konstante Varianz $\sigma_{Z_t}^2$ hat.

Stellt man den Absatz einer Periode fest, so läßt sich nicht annehmen, daß er die allgemeine "wahre" Nachfrage nach diesem Gut in dieser Periodewiedergibt. Vielmehr kann man vermuten, daß sich bei einer Vielzahl von Kunden unabhängig von Strukturverschiebungen des Marktes in jeder betrachteten Periode Bestellvariationen auf die Absatzhöhe auswirken.¹⁾ Haben sie den Charakter von Zufallsvariablen, schlägt sich das in den Beobachtungen der Absatzmengen wie ein die wahre Nachfrage überlagernder Beobachtungsfehler nieder.

Wird dieser Beobachtungsfehler zum Zeitpunkt t Z_t genannt, der beobachtete Wert selbst mit X_t , und ist a_t die wahre Nachfrage nach diesem Artikel, dann besteht folgender Zusammenhang:

$$X_t = a_t + Z_t . \quad (3.10)$$

Genau wie der den Zufallsweg der wahren Nachfrage begründende Prozeß Y_t soll auch Z_t ein Prozeß aus unkorrelierten Zufallsvariablen mit einem Mittelwert von Null und einer endlichen Varianz $\sigma_{Z_t}^2$ sein.

3.5 Ein Zufallswegmodell für Güter mit linear steigendem Absatzverlauf

Das Modell eines langsamen Zufallswegprozesses läßt sich auch

1) Vgl. C.C. HOLT, F. MODIGLIANI, J.F. MUTH und H.A. SIMON: Planning Production, Inventories, and Work Force, 4th Printing, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1965, S. 174.

für solche Güter bilden, deren Absatzzeitreihen einen steigenden oder fallenden linearen Trend vermuten lassen.¹⁾ Es sei b_t der Zuwachs der wahren Nachfrage nach einem Gut in der Periode t , deren Länge mit eins angenommen wird. In einem Polynom vom Grade 1 bezeichnet man b_t auch als Steigung der Geraden. Die wahre Nachfrage zum Zeitpunkt t ergibt sich dann aus derjenigen der Vorperiode, vermehrt um ihre lineare Zunahme in der Periode t . Hinzu kommt noch eine zufällige Verschiebung W_t des konstanten Gliedes, so daß sich folgende Relation ergibt:

$$a_t = a_{t-1} + b_t + W_t . \quad (3.11)$$

Unterstellt wird jedoch zusätzlich, daß auch die Zunahme der wahren Nachfrage von Periode zu Periode eine zufällige Verschiebung durch einen Zufallsprozeß Y_t mit dem Mittelwert von Null und endlicher Varianz σ_Y^2 erfährt. Der Zuwachs b_t des wahren Bedarfs ist dann b_t gleich dem Zuwachs in der Vorperiode, vermehrt oder vermindert um die Realisation einer Zufallsvariablen Y_t . Dieser Zusammenhang wird durch den Ausdruck

$$b_t = b_{t-1} + Y_t \quad (3.12)$$

dargestellt. Für die beobachtete Absatzmenge gilt die Zusammensetzung aus der wahren Nachfrage a_t zum Zeitpunkt t und einem Zufallsfehler Z_t :

$$X_t = a_t + Z_t . \quad (3.13)$$

1) Vgl. J.P. HARRISON: Exponential smoothing. Loc.cit., 823.

Diese Überlegungen über einen Zufallsweg der wirklichen Nachfrage eines Gutes im Zeitablauf lassen sich auf alle in einem Polynom durch bestimmte Koeffizienten berücksichtigten Veränderungskomponenten des wahren Bedarfs ausdehnen.¹⁾

¹⁾ Vgl. P.J. HARRISON: Exponential smoothing. Loc.cit., 823 f.

4. Methoden der Prognose von Zeitreihen des Absatzes

4.1 Univariable und multivariable Prognosemethoden

Prognosemethoden, die zur Überwindung der Ungewißheit über zukünftige Ereignisse dienen, lassen sich grundsätzlich danach unterscheiden, ob die von ihnen zur Prognose herangezogenen Zeitreihen univariabel oder multivariable sind. Bezieht man diese Unterscheidung streng auf die in das Prognoseverfahren einbezogenen stochastischen Variablen, so kann man ein solches Verfahren, das Schlüsse über zukünftige Ereignisse aus den Realisationen mehrerer verschiedener stochastischer Prozesse zieht, als eine multivariable Prognosemethode bezeichnen. ¹⁾

Eine univariable Prognosemethode dagegen bestimmt einen zukünftigen Wert der Realisation eines stochastischen Prozesses allein aus einer zu ihm gehörenden Zeitreihe, die aus den Beobachtungswerten von nur einer Merkmalsausprägung besteht. Nur dieser letzte Typ der Prognosemethoden soll im folgenden betrachtet werden.

Außerdem soll innerhalb dieser Gruppe eine Beschränkung auf solche Verfahren erfolgen, die lineare Beziehungen zwischen der Prognose und den Realisationen eines Prozesses herstellen. Die genaue Form eines solchen univariablen, linearen Prognosesystems hängt weitgehend von der Hypothese über die Struktur des Prozesses ab, der die Zeitreihe erzeugt. Bei ökonomischen Zeitreihen wird diese Hypothese meistens nur aufgrund der Untersuchung über das Vorhandensein und den Verlauf der Komponenten der Zeitreihe gebildet.

1) Vgl. W. WETZEL: Univariable mikro-ökonomische Prognosemodelle mit exponentieller Gewichtung der Beobachtungswerte. *Metrika*, 6 (1963), 156.

4.2 Prognosen stationärer Prozesse

Gelangt man durch die Untersuchung der Zeitreihen eines Prozesses zu der Auffassung, daß der Prozeß stationär im weiteren Sinne ist, dann lassen sich in einem linearen Prognosemodell der Form¹⁾

$$\hat{x}_{t+h}^* = \sum_{i=0}^{\infty} w_i x_{t-i} \quad (4.1)$$

die w_i , die als Gewichte bezeichnet werden, so bestimmen, daß eine bestmögliche Prognose im Zeitpunkt t für den Zeitpunkt $t+h$ gewonnen wird.²⁾ Als Kriterium für eine beste Prognose wird das Prinzip des kleinsten mittleren Quadratfehlers der Prognose benutzt.³⁾ Bei einer Prognose für eine in der Zukunft liegende Periode $t+h$ bedeutet das, wenn e_{t+h} ⁴⁾ der Prognosefehler im Zeitpunkt $t+h$ bei einer Prognose im Zeitpunkt t ist:

$$E(E_{t+h}^2) = E[(x_{t+h} - \sum_{i=0}^{\infty} w_i x_{t-i})^2] \rightarrow \text{Min!} \quad (4.2)$$

Führt man die Quadrierung auf der rechten Seite der Gleichung durch und bildet die Erwartungswerte, dann zeigt sich, daß die Gewichte w_i , die diese Funktion zu einem Minimum machen, allein durch die Autokovarianzfunktion des stationären

-
- 1) Prognosewerte werden wie hier immer mit einem Stern versehen, während Schätzwerte mit einem Dach gekennzeichnet werden.
 - 2) h bezeichnet hier wie auch im folgenden ein Zeitintervall, das vom Zeitpunkt t aus in die Zukunft gerichtet ist.
 - 3) Vgl. N. WIENER: Loc. cit., S. 13, ebenso G.M. JENKINS und D.G. WATTS: Loc. cit., S. 154.
 - 4) Von der Darstellung des Erwartungswertoperators E unterscheidet sich diejenige der Zufallsvariablen des Prognosefehlers dadurch, daß die letztere immer mit einem Zeitindex versehen ist.

Prozesses bestimmt werden können.¹⁾ Ein aufgrund dieses Kriteriums gewonnenes System wird als Filter bezeichnet, wenn es dazu dient, die durch eine Zufallsgröße, die man auch Zufallsfehler oder Rauschen nennt, überlagerte wahre Größe, die man auch als Signal bezeichnet, aus den Zeitreihenwerten des Prozesses unter Berücksichtigung des angegebenen Optimalitätskriteriums herauszufiltern.²⁾

Dieses Prinzip ist bei technisch-physikalischen Problemen von größerer Bedeutung als bei ökonomischen Analysen und Prognosen, da bei ökonomischen Zeitreihen im allgemeinen mit einem nichtstationären Verhalten gerechnet werden muß, und darüberhinaus die Bestimmung der Autokovarianzfunktionen für die praktischen Zwecke von kurzfristigen Prognosen zu kompliziert und aufwendig ist.³⁾

4.3 Die Ausgleichung von Zeitreihenwerten als Grundlage der Prognose nichtstationärer Prozesse

Für nichtstationäre Prozesse sollen in der folgenden Untersuchung die linearen Prognosesysteme betrachtet werden, die auf der sogenannten Ausgleichung von Beobachtungswerten aufbauen. Diese Verfahren haben gemeinsam, daß sie die durch den Zufallscharakter des Prozesses unregelmäßig gestreuten Beobachtungswerte auf rechnerische Weise ausgleichen wollen, um sie durch eine Funktion geglättet darstellen zu können.⁴⁾

Will man z.B. die Werte einer Zeitreihe durch ein Polynom von einem bestimmten Grade ausgleichen, dann bedeutet das, daß diese Beobachtungswerte zwar alle zur Bestimmung der

1) Vgl. N. WIENER: Loc. cit., S. 58.

2) Dieselbe Quelle wie 1), S. 10.

3) Vgl. G.M. JENKINS und D.G. WATTS: Loc.cit., S. 180 und 184.

4) K. STRUBECKER: Einführung in die höhere Mathematik, Band I: Grundlagen. 2., verbesserte Auflage, München: Oldenbourg-Verlag, 1966, S. 53.

Koeffizienten des Polynoms herangezogen werden, aber nicht notwendigerweise auch Werte des Polynoms sind. Der Grad des Polynoms ist also in der Regel kleiner als die Anzahl der auszugleichenden Beobachtungswerte. Aus einer solchen Ausgleichsfunktion läßt sich dann durch Extrapolation eine Prognose für einen zukünftigen Zeitpunkt gewinnen. Ob solche Funktionen gleichzeitig eine gute Approximation für die Parameter eines stochastischen Prozesses liefern, läßt sich durch ihre Untersuchung im Hinblick auf die Erfüllung inferenztheoretischer Kriterien guter Schätzungen feststellen. Es wird dabei geprüft, ob sie die Bedingungen der Konsistenz, der Erwartungstreue, der Suffizienz und Effizienz erfüllen.¹⁾

Hier sollen zwei Arten von Ausgleichsverfahren unterschieden werden: Solche, die alle in der Vergangenheit gewonnenen Zeitreihenwerte ausgleichen, und solche, die nur eine bestimmte Anzahl der Beobachtungswerte, die kleiner als ihre Gesamtanzahl ist, in die Glättung einbeziehen.

4.4 Die Ausgleichung aller Zeitreihenwerte mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate als Grundlage einer Prognose

Zeitreihenprozesse, die im Mittelwert nichtstationär sind, weil sie einen allgemeinen steigenden oder fallenden Trend aufweisen, lassen sich mit Hilfe von Regressionsfunktionen nach der Methode der kleinsten Quadrate beschreiben.

Obwohl bei univariablen Zeitreihen die nach dieser Methode bestimmten Funktionen als unabhängige Variable eine nicht-stochastische Größe, nämlich die Zeit, enthalten, und nur

1) Vgl. G. MENGES: Grundriß der Statistik. Loc. cit., S. 298.

die Zeitreihenwerte Realisationen einer abhängigen Zufallsvariablen sind, lassen sich diese Funktionen trotzdem als Regressionsfunktionen bezeichnen, weil die Theorie der "Kleinste-Quadrate-Regressionsfunktionen" auch für diesen Fall gültig ist.¹⁾ Unter diesem Gesichtspunkt, daß nämlich eine solche Regressionsfunktion einen Zusammenhang zwischen den Zufallsvariablen eines univariablen Prozesses und einer deterministischen Größe herstellt, läßt sich die auf dieser Funktion gegründete Prognosemethode als ein univariablen Verfahren bezeichnen. Eine beste Ausgleichung der Beobachtungen wird durch eine Regressionsfunktion von einem bestimmten Grade immer in dem Sinne erreicht, daß die Quadratsumme der Abweichungen der Beobachtungswerte von der Regressionsfunktion ein Minimum ist.²⁾ Für den Fall, daß die Zufallsvariablen des Prozesses mit der gleichen Varianz normal verteilt sind, stimmt sie mit der besten Schätzung nach der Maximum-Likelihood-Methode überein.³⁾ Bestimmt man eine solche Regression von den Zeitreihenwerten auf die Zeit, dann läßt sich durch Einsetzen des Zeitpunktes in der Zukunft, für den eine Prognose verlangt wird, eine Extrapolationsprognose durchführen.

Die Anwendung der Ausgleichung mit Hilfe von Regressionsfunktionen scheint für kurzfristige Prognosen von Absatzzeitreihen aus verschiedenen Gründen nicht sehr geeignet zu sein. Um eine ausreichende Genauigkeit zu erhalten, sollte die Zahl der Zeitreihenwerte, die zur Schätzung der Regressionskoeffizienten herangezogen werden, mindestens 30 sein.⁴⁾ Bezieht man aber 30 Beobachtungen des Absatzes eines Gutes in die Berechnung ein, die alle mit gleichem Gewicht zur

1) Vgl. H. CRAMER: Mathematical Methods of Statistics. Princeton: Princeton University Press, 1946, S. 548.

2) Vgl. G.M. JENKINS und D.G. WATTS: Loc. cit., S. 107.

3) Vgl. G. MENGES: Grundriß der Statistik. Teil 1: Theorie. Loc. cit., S. 317.

4) Vgl. M. EZEKIEL und K.A. FOX: Methods of Correlation and Regression Analysis. New York: John Wiley & Sons, Inc., 6th Printing, 1967, S. 21 f.

Bestimmung der Lage und Steigung der Funktion beitragen, so erkennt man, daß bei monatlichen Beobachtungen der am weitesten zurückliegende noch berücksichtigte Beobachtungswert schon zweieinhalb Jahre alt ist.

Führt man monatlich Prognosen für eine kurzfristige zukünftige Periode durch, dann ist es ratsam, für die sich dauernd erweiternde Zeitreihe jeden Monat von neuem eine Regressionsfunktion zu bestimmen.¹⁾ Theoretisch würde sich dadurch die stochastische Genauigkeit verbessern. Als praktischen Nachteil müßte man dann jedoch in Kauf nehmen, daß Strukturänderungen der Zeitreihe in der jüngeren Vergangenheit nur geringen Einfluß auf die Lage der Ausgleichsfunktion hätten, da das relative Gewicht aller in die Rechnung miteinbezogenen Beobachtungswerte mit zunehmender Anzahl sinkt. Theoretisch würde die Regressionsfunktion dadurch zwar stabiler, gegenüber Änderungen der Struktur des Prozesses würde sie jedoch gleichzeitig immer unflexibler.

Als weiterer Nachteil eines solchen Prognosesystems sind die bei einer großen Anzahl von zu prognostizierenden Zeitreihen aufwendigen und zahlreichen Rechenoperationen seiner Anwendung anzusehen. Es kommt noch hinzu, daß die sich von Beobachtungszeitpunkt zu Beobachtungszeitpunkt erweiternden Zeitreihen für ihre Speicherung immer mehr Raum beanspruchen würden.

4.5 Ausgleichung von Zeitreihen nichtstationärer Prozesse mit gleitendem Zeitintervall der Beobachtung

Bei nichtstationären Prozessen kann man für kurzfristige Prognosen zur stärkeren Berücksichtigung der sich in den

1) Vgl. M.G. KENDALL und A. STUART: Loc. cit., S. 366.

Beobachtungswerten ausprägenden Strukturänderungen des Prozesses solche Verfahren verwenden, die bei jeder neuen Prognose nur eine gewisse Anzahl von Beobachtungswerten der Vergangenheit berücksichtigen.

Die einfachste Form dieser Methoden, die man unter dem Begriff der Ausgleichung durch gleitende Durchschnitte zusammenfassen kann, ist ein ungewogener gleitender Mittelwert.¹⁾ Aus einem über die Zeitachse gleitenden Intervall konstanter Länge entnimmt man die äquidistanten Beobachtungswerte eines Prozesses und bildet für jedes gegenüber dem vorherigen um eine Periode verschobene Zeitintervall das arithmetische Mittel. Als ungewogenen gleitenden Mittelwert bezeichnet man also eine zum Zeitpunkt t berechnete Größe $\hat{a}_t$, die aus n Gliedern einer Zeitreihe auf die folgende Art gewonnen wird:

$$\hat{a}_t = \frac{x_t + x_{t-1} + \dots + x_{t-n+1}}{n} \quad . \quad (4.3)$$

Dieser Wert wird in der Theorie der gleitenden Durchschnitte in der Regel der mittleren der in die Glättung einbezogenen Perioden zugeordnet. Unter der Hypothese, daß der Mittelwert des Prozesses innerhalb des Zeitbereichs, aus dem die Beobachtungswerte stammen, konstant ist und darüber hinaus auch mindestens bis zu dem Zeitpunkt, für den eine Prognose erstellt werden soll, konstant bleibt, wird diese Größe als Prognosewert benutzt.

Gewogene gleitende Durchschnitte ordnen jedem Beobachtungswert aus einer Folge mit einer bestimmten Anzahl von Gliedern ein Gewicht zu, das aufgrund einer Hypothese über

1) Vgl. K. WEICHSELBERGER; Loc. cit., S. 187.

den Verlauf der systematischen Komponente nach bestimmten, sich daraus ergebenden Kriterien ausgewählt wird. Auf eine allgemeine Darstellung der Form der Gewichte und der Berechnung der gleitenden Durchschnitte bei Zeitreihen, die einen steigenden oder fallenden Trend und möglicherweise eine Saisonkomponente aufweisen, soll hier verzichtet werden. Es kommt hier nur darauf an, einige charakteristische Eigenschaften einer Ausgleichung durch gewogene oder ungewogene gleitende Durchschnitte aufzuzeigen.

Nur dann, wenn die Summe der Gewichte gleich eins ist, scheint es berechtigt zu sein, in Analogie zum arithmetischen Mittel die berechnete Größe einen Mittelwert zu nennen. Neben einem solchen Gewichtungsschema weisen gewogene oder ungewogene gleitende Durchschnitte als weiteres charakteristisches Merkmal die konstante Anzahl von Gliedern auf, die jeweils bei einer Berechnung aus der Zeitreihe herausgegriffen werden.

Zur Einordnung von solchen Ausgleichsverfahren, die zwar auch durch eine additive gleitende Verknüpfung von Beobachtungswerten charakterisiert sind, deren Gewichte jedoch nicht notwendigerweise die Summe von eins bilden, und zur Annäherung an den Begriff des gleitenden Durchschnitts bei der Analyse stationärer Prozesse¹⁾ ist es zweckmäßig, über den oben beschriebenen Begriff im Sinne eines gewogenen oder ungewogenen arithmetischen Mittels hinauszugehen. Man gelangt dann zu dem folgenden erweiterten Begriff des gleitenden Mittelwertes: Jede gleitende Linearkombination von einer bestimmten Anzahl von Zeitreihenwerten kann man als gleitenden Durchschnitt bezeichnen.²⁾

1) Siehe Abschnitt 2.4 "Drei stationäre stochastische Prozesse."

2) Vgl. K. WEICHSELBERGER: Loc. cit., S. 191, ebenso H. WOLD: Loc. cit., S. 51.

Diese unter diesen Begriff fallenden mit der Zeit fortschreitenden Ausgleichsverfahren besitzen alle die besondere Fähigkeit, sich im Zeitablauf auftretenden stochastischen Veränderungen der Strukturkomponente eines Prozesses anzupassen. Dadurch wird in den auf ihnen basierenden Prognosen die laufende in die Zukunft gerichtete Entwicklung der Umweltbedingungen, wie sie sich in den jüngsten Zeitreihenwerten ausprägt, berücksichtigt. Die Bedeutung dieser Aussage soll noch an anderer Stelle bei der Darstellung einer bestimmten Gruppe dieser anpassungsfähigen Ausgleichsverfahren erläutert werden.

4.6 Gliederung der zu untersuchenden Prognoseverfahren

Die Gemeinsamkeit der Verfahren, die zur Gruppe der anpassungsfähigen Ausgleichsverfahren gehören, liegt in der Form des bei der Glättung der Zeitreihenwerte verwendeten Gewichtungsschemas. Es scheint, daß alle Methoden, die hier zu dieser Gruppe gezählt werden sollen, wesentlich in ihrer Entstehung und Gestaltung von dem speziellen Grundgedanken dieser Art der Gewichtung angeregt wurden. Dieser Grundgedanke soll als Ausgangspunkt für eine Betrachtung der einzelnen Modelle zunächst von mehreren Seiten beleuchtet werden.

Daran anschließend folgt eine Untersuchung der Prognoseverfahren, deren Gliederung hier nach den ihnen zugrundeliegenden Zeitreihenmodellen vorgenommen wird. Sie wird zuerst für ein Prognosesystem vorgenommen, welches einen konstanten Trend unterstellt, der von einer irregulären Komponente überlagert wird, wie sie auch bei allen folgenden Modellen in derselben Weise auftritt. In einem weiteren Teil der Untersuchung sollen dann die Prognoseverfahren be-

trachtet werden, denen ein linearer Trend zugrundegelegt wird.

Wie schon erwähnt wurde, enthält diese Klassifizierung noch keine genauen Angaben über den die Zeitreihe erzeugenden stochastischen Prozeß. Deshalb wird innerhalb dieser Zeitreihentypen eine weitere Einteilung vorgenommen, um die notwendigen theoretischen Begriffe zu erhalten, die für eine Charakterisierung der Prognoseverfahren erforderlich sind. Diese Einteilung entspricht zusätzlichen Annahmen über das Verhalten der Zeitreihenkomponenten, wodurch eine Spezifizierung der Parameter der Prozesse erreicht werden soll.

Beim konstanten Trend sollen drei Annahmen, wie sie auch in den einzelnen Modellen vorzufinden sind, getroffen werden. Zunächst wird unterstellt, daß der Trend in einem bestimmten Zeitabschnitt absolut konstant, d.h. ohne Strukturbrüche verläuft. Darauf werden in Erweiterung dieses Modells Veränderungen in der Höhe des konstanten Trends berücksichtigt, die jedoch nicht näher in ihrem Ausmaß und dem Zeitpunkt ihres Eintretens bestimmt sind. In einem weiteren Abschnitt wird dann das Verfahren für einen konstanten Trend untersucht, der jedoch im Zeitablauf stochastische Veränderungen in einer genau bestimmten Art erfährt.

Dieselbe Gliederung der Untersuchung soll nach entsprechenden Modifikationen der Annahmen auch für die Prognoseverfahren, die einen linearen Trend unterstellen, gewählt werden.

Aus diesen Untersuchungen sollen die Grundlagen für eine zusammenfassende Beurteilung nach praktischen und theoretischen Gesichtspunkten gewonnen werden.

5. Das Grundprinzip der exponentiellen Ausgleichung - Allgemeine Begründungen und Eigenschaften -

5.1 Das allgemeine Zeitreihenmodell für einen konstanten Trend

Liegen die monatlichen Beobachtungen der Absatzmengen eines Gutes über eine Anzahl von Jahren vor, und stellt man bei ihrer Untersuchung fest, daß ihre systematische Struktur im allgemeinen zeitunabhängig zu sein scheint, dann kann man diese Feststellung durch das im folgenden beschriebene Zeitreihenmodell ausdrücken. In diesem Modell sind X_t die Zufallsvariablen der Beobachtungswerte, die sich aus der konstanten Trendkomponente a_t und der irregulären Komponente Z_t zusammensetzen, wobei t die den Beobachtungswerten zugeordneten Zeitpunkte aus einem endlichen Zeitintervall, das hier mit T bezeichnet werden soll, bedeuten. Man gelangt also zu der Darstellung:

$$X_t = a_t + Z_t . \quad (5.1)$$

Z_t ist der bei der Zeitreihenzerlegung üblicherweise angenommene Gauss-Prozeß der irregulären Komponente mit einem Mittelwert von Null und konstanter Varianz, dessen Zufallsvariablen untereinander alle unkorreliert sind.

Will man zum Zeitpunkt t eine Prognose für einen zukünftigen Zeitpunkt durchführen, der außerhalb des Zeitintervalls T liegt und mit $t+h$ bezeichnet werden soll, so liegt es nahe, eine Schätzung des Erwartungswertes des Prozesses durch einen Mittelwert der Zeitreihenwerte vorzunehmen, um diesen Wert als Prognose für eine zukünftige Realisation des Prozesses zu verwenden.

5.2 Ausgleichung von Zeitreihen durch ungewogene gleitende Durchschnitte

Ist das beschriebene Zeitreihenmodell zwar eine gute allgemeine Darstellung der Struktur des Prozesses für den Zeitraum T , vermutet man jedoch, daß die darin enthaltene Größe a_t der Trendkomponente nicht absolut in dem ganzen Zeitintervall konstant verläuft und entschließt man sich deshalb, nur eine Anzahl von n Zeitreihenwerten, die kleiner ist als die Gesamtanzahl aller Beobachtungen in T , in die Mittelwertbildung aufzunehmen, dann entspricht das einer Ausgleichung durch einen ungewogenen gleitenden Mittelwert. Bei jeder neuen Beobachtung basiert dann eine neue Prognose nur auf den letzten n Zeitreihenwerten des Prozesses.

Durch die Anwendung eines solchen Verfahrens bringt man strenggenommen zum Ausdruck, daß man nicht einen stationären Prozeß in der durch das Modell angegebenen Form unterstellt, sondern implizit ein nichtstationäres Verhalten voraussetzt. Damit drückt man aber auch aus, daß die jüngeren Zeitreihenwerte die besten Informationen über den zukünftigen Verlauf der Zeitreihe bieten.

Aus diesem Grunde wird auch beim Erhalt einer neuen Beobachtung am Ende des nächsten Monats dieser neue Wert zur Berechnung eines neuen Mittelwertes herangezogen, und der älteste Wert, der in der vorherigen Rechnung noch miteinbezogen war, nicht mehr berücksichtigt. Dieses Vorgehen entspricht einer Gewichtung der letzten n Beobachtungen mit ein und demselben Faktor $\frac{1}{n}$, während den Zeitreihenwerten, die weiter zurückliegen $1st-n+1$ Zeiteinheiten, ein Gewicht von Null zugeordnet wird.

5.3 Ausgleichung von Zeitreihen durch arithmetisch gewogene gleitende Durchschnitte

Man kann das beim Fortschreiten schwindende Vertrauen in die Zeitreihenwerte der Vergangenheit in bezug auf ihre Aussagekraft über das wahrscheinliche Eintreten zukünftiger Ereignisse ebenfalls dadurch zum Ausdruck bringen, daß man den Beobachtungswerten ein Gewichtungsschema aus einer endlichen in die Vergangenheit gerichtet degressiv fallenden **a r i t h m e t i s c h e n** Folge von Zahlen zuordnet, die zum Beispiel für ein Segment der Zeitreihe, das aus fünf Glieder besteht, folgenden Aufbau hat:

Periode	$t - 4$	$t - 3$	$t - 2$	$t - 1$	t
Gewicht	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3

Die Summe der Glieder dieser arithmetischen Folge ist gleich eins. Die mit Hilfe dieses Gewichtungsschemas aus den Zeitreihenwerten in jeder Periode von neuem gewonnenen Größen bilden eine Zeitreihe von fünfgliedrigen, gewogenen gleitenden Durchschnitten.

5.4 Ausgleichung von Zeitreihen durch geometrisch gewogene gleitende Durchschnitte

Die gleiche Wirkung einer abnehmenden Gewichtung läßt sich erreichen, wenn man als Gewichtungsschema eine unendliche **g e o m e t r i s c h e** Folge benutzt. Um zu erreichen, daß der Grenzwert der Summe der Glieder eins ergibt, und kein Zeitreihenwert ein Gewicht größer als eins hat, nimmt man als Anfangsglied der Folge eine positive Zahl, die

kleiner oder gleich eins ist, und einen Quotienten der Folge von eins vermindert um das Anfangsglied. Ist α das Anfangsglied einer solchen Folge, dann läßt sich der Grenzwert unter diesen Bedingungen so darstellen:¹⁾

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha + \alpha(1 - \alpha) + \alpha(1 - \alpha)^2 + \dots + \alpha(1 - \alpha)^{n-1}]$$

$$= \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)} = 1 \quad \text{für } 0 \leq \alpha \leq 1 \quad . \quad (5.2)$$

Wenn es praktisch auch unmöglich ist, alle Glieder der unendlichen geometrischen Folge als Zeitreihengewichte zu verwenden, so soll doch im Laufe dieser Untersuchung gezeigt werden, daß der Fehler, der dadurch entsteht, daß nur mit einer endlichen Anzahl von Gliedern der Folge gewogen wird, durch einige andere Vorteile des Gewichtungsschemas wieder ausgeglichen wird.

Dieses Gewichtungsschema hat für die letzten n Zeitpunkte einer Zeitreihe folgendes Aussehen:

Periode	$t-n+1$	...	$t-2$	$t-1$	t
Gewicht	$\alpha(1-\alpha)^{n-1}$	...	$\alpha(1-\alpha)^2$	$\alpha(1-\alpha)$	α

Unter der Bedingung, daß α in den angegebenen Grenzen liegt, bildet die Folge der Gewichte eine Nullfolge, da sie mit wachsendem n gegen ihren Grenzwert von Null strebt.

1) Vgl. A. STRUBECKER: Loc. cit., S. 488.

Aus dieser Aussage läßt sich schließen, daß die Ausgleichung einer abzählbar unendlichen Menge von Beobachtungswerten mit Hilfe dieses Gewichtungsschemas wie folgt dargestellt werden kann:¹⁾

$$\hat{a}_t = \alpha x_t + \alpha (1 - \alpha) x_{t-1} + \alpha (1 - \alpha)^2 x_{t-2} + \dots \quad (5.3)$$

Kürzer läßt sich diese Reihe noch in der folgenden Form schreiben:

$$\hat{a}_t = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \alpha)^n x_{t-n} \quad (5.4)$$

5.5 Ableitung des Grundprinzips der exponentiellen Ausgleichung

Diese Art der Gewichtung hat eine rechentechnisch besonders günstige Eigenschaft, da sich aus ihr eine einfache Fortschreibung der Prognosen bei fortschreitender Zeit gewinnen läßt. Verwendet man den durch die Ausgleichung gewonnenen Wert $\hat{a}_t$ als Prognose für eine zukünftige Realisation des Prozesses X_t , und bezeichnet man diese Prognose für einen zukünftigen Zeitpunkt $t+h$ mit $x_{t,h}^*$ ²⁾, dann kann man aus der Schreibweise der Reihe (5.3) diese Fortschreibung ableiten.

Hatte man zum Zeitpunkt $t-1$ eine Prognose $x_{t-1,1}^*$ für die Periode t durch Summenbildung aus der Reihe

$$x_{t-1,1}^* = \alpha x_{t-1} + \alpha (1 - \alpha) x_{t-2} + \alpha (1 - \alpha)^2 x_{t-3} + \dots \quad (5.5)$$

1) Zur Darstellung von Summen mit diesen Eigenschaften siehe K. STRUBECKER: Loc. cit., S. 508.

2) Während der erste Index den Zeitpunkt der Prognoseerstellung angibt, läßt sich von diesem Zeitpunkt ausgehend durch den zweiten Index der Zeitpunkt in der Zukunft ermitteln, für welchen eine Prognose gewonnen werden soll, indem man diese beiden Größen addiert. Diese Schreibweise soll auch für die folgenden Ausführungen gelten.

gewonnen, und wendet man dasselbe Gewichtungsschema eine Periode später zum Zeitpunkt t an, so erhält man die Prognose $x_{t,1}^*$ für den Zeitpunkt $t+1$ unter Einbeziehung der jetzt vorliegenden Beobachtung x_t durch

$$x_{t,1}^* = \alpha x_t + \alpha (1 - \alpha) x_{t-1} + \alpha (1 - \alpha)^2 x_{t-2} + \dots \quad (5.6)$$

Durch Vergleich der beiden Reihen $x_{t-1,1}^*$ und $x_{t,1}^*$ stellt man fest, daß sie vom Zeitpunkt $t-1$ ab bis auf einen Faktor $(1 - \alpha)$ in ihren Summanden übereinstimmen.

Bildet man

$$x_{t,1}^* = \alpha x_t + (1 - \alpha) [\alpha x_{t-1} + \alpha (1 - \alpha) x_{t-2} + \alpha (1 - \alpha)^2 x_{t-3} + \dots] \quad (5.7)$$

und ersetzt den Ausdruck in der letzten Klammer durch die Prognose $x_{t-1,1}^*$, deren Wert er gerade ausmacht, so gelangt man zu der folgenden einfachen Rekursionsformel:

$$x_{t,1}^* = \alpha x_t + (1 - \alpha) x_{t-1,1}^* \quad (5.8)$$

Diese Gleichung stellt das Grundprinzip der auf einer geometrischen Ausgleichung der Zeitreihe aufbauenden Prognoseverfahren dar.¹⁾ Im allgemeinen wird sie als exponentielle Ausgleichung bezeichnet, weil die geometrisch degressive Folge der Gewichte den Werten einer abnehmenden stetigen Exponentialfunktion ähnlich ist.²⁾

1) Vgl. R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 101.

2) Dieselbe Quelle wie 1), S. 105.

Die Größe α , das Anfangsglied der geometrischen Gewichtsfolge, wird auch Ausgleichsparameter oder Ausgleichskonstante genannt.

5.6 Der Einfluß der Größe des Ausgleichsparameters auf die Prognosen

Da praktisch eine Zeitreihe nur aus einer endlichen Anzahl von Beobachtungswerten besteht, und es außerdem wegen des möglichen nichtstationären Verhaltens des Prozesses erwägenswert schien, nur den Ausschnitt der letzten n Zeitreihenwerte in die Berechnung einer Prognose einzubeziehen, soll für verschiedene Anfangsglieder des geometrischen Gewichtungsschemas der Einfluß der Zeitreihenwerte auf den Prognosewert untersucht werden.

In den Spalten der Tabelle 1 sind die Glieder g_{t-n}, α_i geometrischer Folgen eingetragen, die sich bei gegebenem Wert α_i auf die folgende Art ermitteln lassen:

$$g_{t-n, \alpha_i} = \alpha_i (1 - \alpha_i)^n . \quad (5.9)$$

Wie aus der Vorspalte der Tabelle ersichtlich ist, ist die Berechnung der einzelnen Folgen vom Zeitpunkt t bis zum Zeitpunkt $t-10$ von Periode zu Periode durchgeführt worden, während sie dann bis zum Zeitpunkt $t-30$ nur in Zeitabständen mit einer Länge von 10 Perioden weitergeführt worden ist.

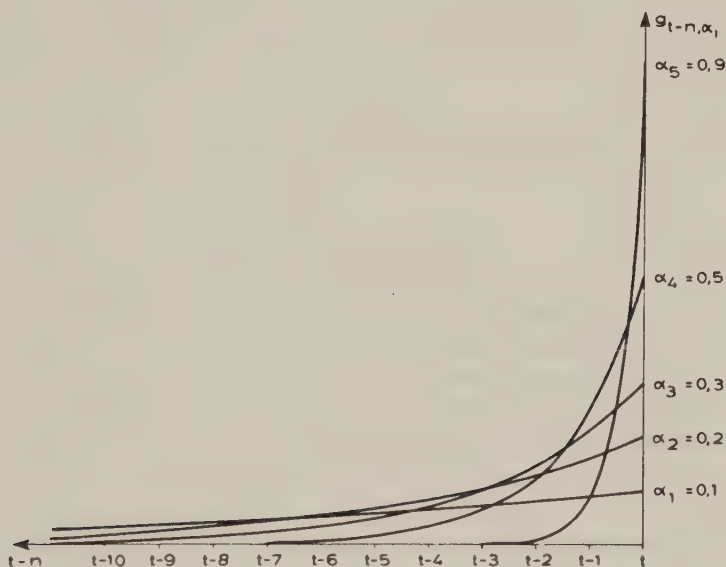
Tabelle 1:

Gewichtungsfaktoren der exponentiellen Ausgleichung
(aufgerundet nach der vierten Stelle nach dem Komma)

Nr. des Gliedes der Folge	Glieder der geometrischen Folge für				
	$\alpha_1=0,1$	$\alpha_2=0,2$	$\alpha_3=0,3$	$\alpha_4=0,5$	$\alpha_5=0,9$
t	0,1000	0,2000	0,3000	0,5000	0,9000
t-1	0,0900	0,1600	0,2100	0,2500	0,0900
t-2	0,0810	0,1280	0,1470	0,1250	0,0090
t-3	0,0729	0,1024	0,1039	0,0625	0,0009
t-4	0,0656	0,0819	0,0720	0,0313	0,0001
t-5	0,0590	0,0655	0,0504	0,0156	0,0
t-6	0,0531	0,0524	0,0353	0,0078	0,0
t-7	0,0478	0,0419	0,0247	0,0039	0,0
t-8	0,0429	0,0336	0,0173	0,0016	0,0
t-9	0,0386	0,0269	0,0124	0,0010	0,0
t-10	0,0347	0,0215	0,0085	0,0005	0,0
t-20	0,0121	0,0023	0,0002	0,0	0,0
t-30	0,0042	0,0002	0,0	0,0	0,0

Aus dem folgenden Diagramm, in dem die Werte der Tabelle 1 durch einen stetigen Kurvenzug verbunden dargestellt sind, geht sehr anschaulich die Abhängigkeit des Verlaufs der Gewichtsfolge von der Höhe des Ausgleichsparameters hervor.

Abbildung 2: Gewichtungsfaktoren g_{t-n, α_i} der exponentiellen Ausgleichung



Aus dem Verlauf der Werte der einzelnen Folgen kann man erkennen, daß der Einfluß der durch sie gewogenen Zeitreihenwerte auf den Wert des gleitenden Durchschnitts stark von der Größe des Ausgleichsparameters α abhängt. Für einen α -Wert von 0,9 ist die Reduzierung der Zeitreihenwerte mit zunehmendem Alter so stark, daß sie be-

reits nach wenigen Perioden einen vernachlässigbar geringen Einfluß ausüben, während gleichzeitig der letzte Zeitreihenwert des Zeitpunktes t übermäßig stark ins Gewicht fällt. Beträgt der Wert des Ausgleichsparameters dagegen $0,1$, dann nimmt die Gewichtung nur langsam ab und das Gewichtungsschema ähnelt dem eines ungewogenen gleitenden Mittelwertes.

5.7 Weitere Begründungen der exponentiellen Ausgleichung von Zeitreihen zum Zwecke der Prognose

Die Einführung einer Gewichtung in Form einer Teilfolge einer unendlichen geometrischen Folge mit abnehmenden Gliedern läßt sich auf verschiedene Arten auch anschaulich begründen.

Wenn jemand damit beschäftigt ist, eine kurzfristige Prognose durch die Extrapolation einer Kurve, die durch die in einem Diagramm entlang der Zeitachse aufgetragenen Zeitreihenwerte gelegt werden soll, durchzuführen, dann wird er bei ihrer Einzeichnung versuchen, die letzten Zeitreihenwerte am besten auszugleichen und den weiter zurückliegenden weniger Beachtung schenken.¹⁾

Ein solches Verhalten gleicht einem Lernprozeß bei der laufenden Entscheidungsfindung, bei dem man jüngere Informationen stärker bewertet als weiter zurückliegende Informationen, weil letztere im Laufe der Zeit an Wichtigkeit für die Gegenwart und Zukunft verlieren und allmählich vergessen werden.²⁾

1) Vgl. P.J. HARRISON: Exponential smoothing. Loc. cit., 835.

2) Vgl. R.G. BROWN und R.F. MEYER: The fundamental theorem of exponential smoothing. Operations Research, 9 (1961), 675.

Unter einem etwas anderen Gesichtspunkt, der das Grundprinzip der exponentiellen Gewichtung zunächst nur indirekt zeigt, aber die bei der praktischen Anwendung benutzte mathematische Form sofort zeigt, wird das Verfahren auch so beschrieben.¹⁾ Erstellt man laufend monatliche Prognosen für den nächstfolgenden Monat über die Höhe der Absatzmengen eines Gutes, so kann man auf einfache Weise eine neue Prognose durch die Berechnung eines einfachen gewogenen Mittelwertes aus dem Beobachtungswert des gegenwärtigen Monats und dem Prognosewert des Vormonats für den gegenwärtigen Monat auf die folgende Art gewinnen:

$$x_{t,1}^* = \alpha x_t + (1 - \alpha) x_{t-1,1}^* \quad (5.10)$$

Nahe verwandt mit dieser Darstellung, die eine exponentielle Gewichtung der Zeitreihenwerte bedingt, ist noch der folgende Aspekt, der bei der Kontrolle technischer Prozesse eine Rolle spielt.²⁾ Führt man laufend Prognosen für einen bestimmten, immer gleichweit in der Zukunft liegenden Zeitpunkt durch, so gibt der Prognosefehler, den man durch die Bildung der Differenz aus dem aktuellen Beobachtungswert und der Prognose einer Vorperiode für die laufende Periode erhält, einen Maßstab dafür, wie gut es gelungen ist, den Trendwert zu prognostizieren. In seiner mathematischen Form stellt man den Prognosefehler so dar:³⁾

$$e_{t,1} = x_t - x_{t-1,1}^* \quad (5.11)$$

1) Vgl. P.R. WINTERS: Forecasting sales by exponentially weighted moving averages. Management Science, 6 (1960), 325.

2) Vgl. G.E.P. BOX und G.M. JENKINS: Some statistical aspects of adaptive optimization and control. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 24 (1962), 298, ebenso G.A. BARNARD: New methods of quality control. Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 126 (1963), 255.

3) Während der erste Index die Periode bezeichnet, der eine Zufallsvariable zugeordnet ist, gibt beim Prognosefehler der zweite Index an, wieviel Perioden die Prognose zurückliegt, die zu dieser Abweichung geführt hat.

In diesem Ausdruck ist der Prognosefehler mit $e_{t,1}$, die vorliegende Beobachtung des gegenwärtigen Monats mit x_t , und die Prognose des Vormonats für diesen Monat mit $x_{t-1,1}^*$ bezeichnet worden. Soll eine Prognose für die nächste Periode durchgeführt werden, so läßt sie sich dadurch gewinnen, daß man zur Prognose für den gegenwärtigen Monat einen Bruchteil des Prognosefehlers addiert.¹⁾ Diese Operation kann man so veranschaulichen:

$$x_{t,1}^* = x_{t-1,1}^* + \alpha (x_t - x_{t-1,1}^*) \quad (5.12)$$

Eine solche Korrektur der Prognose für den laufenden Monat zur Gewinnung einer Prognose für die kommende Periode wird auch proportionale Kontrolle genannt, da sie proportional zum Prognosefehler vorgenommen wird.²⁾

Unter dem Gesichtspunkt des Verhaltens eines Unternehmers, der seine Prognosen laufend kontrolliert, ist diese Korrektur auch schon als Reaktion bezeichnet worden, die sich auf die Festsetzung des Ausgleichsparameters, den man dann als Reaktionsparameter bezeichnet, entsprechend der Größe des Prognosefehlers auswirkt.³⁾

Aus dieser Form der Prognoseerstellung (5.12) läßt sich sofort die schon oben angegebene grundlegende Beziehung der exponentiellen Ausgleichung gewinnen:

$$x_{t,1}^* = x_{t-1,1}^* + \alpha x_t - \alpha x_{t-1,1}^* \quad (5.13)$$

$$= \alpha x_t + (1 - \alpha) x_{t-1,1}^* \quad (5.14)$$

-
- 1) Vgl. C.S. VAN DOBBEN DE BRUYN: Prediction by progressive correction. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 24 (1964), 115.
 - 2) Vgl. G.E.P. BOX und G.M. JENKINS: Some statistical aspects. Loc. cit., 314.
 - 3) Vgl. W. WETZEL: Univariable mikroökonomische Prognosemodelle. Loc. cit., 158 und W. WETZEL: Exponentiell gewichtete, univariable Prognosemodelle. Jahrbuch für Nationalökonomie

Aufgrund der Tatsache, daß mit jeder neuen Prognose auf die vorherige und damit auf alle Prognosen und Zeitreihenwerte Bezug genommen wird, läßt sich durch Rekursion das Gewichtungsschema der exponentiellen Ausgleichung ableiten.

Zur Beschreibung dieses Zusammenhangs kann als Ausgangspunkt die Feststellung benutzt werden, daß eine Prognose, die im vorherigen Monat für den gegenwärtigen Monat durchgeführt wurde, auf dem gleichen Wege aus dem Beobachtungswert des Monats und der Prognose des Vormonats erstellt wurde, wie die Prognose des gegenwärtigen Monats für den nächsten Monat. Es gilt also:

$$x_{t-1,1}^* = \alpha x_{t-1} + (1 - \alpha) x_{t-2,1}^* \quad (5.15)$$

Setzt man diese Beziehung in die Gleichung (5.14) ein, dann erhält man:

$$x_{t,1}^* = \alpha x_t + (1 - \alpha) [\alpha x_{t-1} + (1 - \alpha) x_{t-2,1}^*] \quad (5.16)$$

Dieses Ergebnis läßt sich durch Ausmultiplizieren der Klammern umformulieren in

$$x_{t,1}^* = \alpha x_t + \alpha(1 - \alpha) x_{t-1} + (1 - \alpha)^2 x_{t-2,1}^* \quad (5.17)$$

Setzt man nun die Grundbeziehung für die Prognose $x_{t-2,1}^*$ ein und formt auf dieselbe Weise um, dann ergibt sich:

$$x_{t,1}^* = \alpha x_t + \alpha(1 - \alpha) x_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 x_{t-2} + (1 - \alpha)^3 x_{t-3,1}^* \quad (5.18)$$

Dieses Verfahren läßt sich praktisch so lange fortsetzen bis man durch Zurückschreiten bei der ersten, vor n Perioden durchgeführten Prognose anlangt

$$x_{t,1}^* = \alpha x_t + \alpha (1 - \alpha) x_{t-1} + \alpha (1 - \alpha)^2 x_{t-2} + \dots + (1 - \alpha)^n x_{t-n,1}^* \quad (5.19)$$

während es theoretisch, wenn n gegen unendlich geht, zum Grenzwert der exponentiellen Ausgleichung

$$x_{t,1}^* = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \alpha)^n x_{t-n} \quad (5.20)$$

führt. Faßt man in der ersten dieser beiden Gleichungen die ersten n Summanden der Reihe zusammen, dann gelangt man zu der Form:

$$x_{t,1}^* = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \alpha)^k x_{t-k} + (1 - \alpha)^n x_{t-n,1}^* \quad (5.21)$$

Der letzte Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (5.21) sagt zunächst aus, daß diese Form des Ausgleichsverfahrens sich bei genügend großem n an die theoretisch gefundene Form gut annähert, da bei großem n der letzte Summand in der endlichen Reihe sehr klein wird.¹⁾ Dieser Ausdruck läßt aber auch erkennen, daß bei einer praktischen Anwendung des Verfahrens ein Anfangswert für jede laufend zu prognostizierende Zeitreihe gefunden werden muß.

¹⁾ Vgl. R.G. BROWN: Statistical Forecasting for Inventory Control. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959, S. 47.

5.8 Anfangswerte der exponentiellen Ausgleichung und ihre Problematik

Ein Anfangswert für die Prognostizierung nach der Methode der exponentiellen Ausgleichung läßt sich durch die Bildung eines Mittelwertes aus den ersten verfügbaren Beobachtungswerten gewinnen. Benutzt man diesen Wert als erste Prognose, dann läßt sich die Prognoseerstellung in der darauffolgenden Periode mit der exponentiellen Ausgleichung fortsetzen.¹⁾

In diesem Fall, wie auch dann, wenn man als Anfangsprognose den ersten Beobachtungswert wählt, weil bei Beginn des Prognoseverfahrens sonst keine Zeitreihenwerte der Vergangenheit vorlagen²⁾, muß in der Darstellung der exponentiellen Ausgleichung (5.21) der letzte Summand mit dem tatsächlich verwendeten Anfangswert ausgetauscht werden oder in der allgemeinen Form entsprechend gekennzeichnet werden. So wie er oben angegeben ist, stellt er nämlich einen durch exponentielle Ausgleichung gewonnenen Prognosewert dar.

Eine Anfangsprognose läßt sich aber möglicherweise auch aus der Erfahrung mit anderen ähnlichen Zeitreihen bestimmen, wenn sie z.B. die Absatzmengen ähnlicher Güter repräsentieren.

Nach einer gewissen Zeit wird das Gewicht, das bei immer neuen Prognosen diesem Anfangswert beigemessen wird, sehr gering, so daß ein schwerer Fehler in der Anfangsprognose von selbst korrigiert wird. Dadurch wird deutlich, daß auch die Wahl der Höhe der Glättungskonstanten zu Anfang

1) Vgl. R.G. BROWN und R.F. MEYER: Loc. cit., 678.

2) Vgl. R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 101.

des Verfahrens eine große Bedeutung hat. Je höher sie angesetzt wird, desto schneller wird der Anfangswert von Prognose zu Prognose an Gewicht verlieren.¹⁾

Durch diese Überlegungen kann man erkennen, daß das Prognoseverfahren, das auf der exponentiellen Ausgleichung beruht, nicht von Anfang an automatisch arbeitet, sondern daß es sorgfältiger Vorbereitungen bedarf, um das System richtig in Gang zu setzen.

Die Fähigkeit der exponentiellen Ausgleichung, fehlerhaften Anfangswerten im Laufe der Zeit immer weniger Bedeutung beizumessen und sie beinahe ganz zu "vergessen", berechtigt jedoch nicht dazu, dieses Verfahren einem anderen vorzuziehen, da z.B. ein ungewogener gleitender Durchschnitt unter Umständen diese Wirkung sogar schneller erreicht.²⁾

Welches sind aber die tatsächlichen Bestimmungsgründe für die Höhe der Ausgleichskonstanten α , und welches sind die genauen Eigenschaften der Prognosen, die mit Hilfe der exponentiellen Ausgleichung gewonnen werden? Um diese Frage beantworten zu können, muß man auf genaue Annahmen über den die Zeitreihe erzeugenden Prozeß zurückgreifen. Bisher war nur die allgemeine Annahme über den Verlauf der Zeitreihe gemacht worden, daß ein konstanter Trend vorliege. Unter den drei schon erläuterten Annahmen über das Verhalten des Prozesses in der Zeit, wie sie bei der Darstellung des Verfahrens anzutreffen sind, soll die exponentielle Ausgleichung nun beleuchtet werden.

1) R.G. BROWN: Statistical Forecasting. Loc. cit., S. 63 f.

2) Dieselbe Quelle wie 1), S. 30.

6. Eigenschaften von Prognosen auf der Grundlage der exponentiellen Ausgleichung für Zeitreihen mit absolut konstantem Trend

6.1 Das Zeitreihenmodell eines absolut konstanten Trends

Durch die Unterstellung eines absolut konstanten Trends soll hier eine Präzisierung der allgemeinen Annahme des Vorliegens eines konstanten Trends wie im vorherigen Kapitel dahingehend vorgenommen werden, daß diese Strukturkomponente über alle bekannten Zeitreihenwerte hinweg, also vom Beginn der Zeitreihe an bis zur Gegenwart, durch ein und dieselbe konstante Größe repräsentiert werden kann. Mag diese strenge Annahme über den Verlauf des Prozesses auch von vornherein als unrealistisch erscheinen, so ist es doch notwendig, auf ihrer Grundlage die exponentielle Ausgleichung zu untersuchen, weil einige ihrer Eigenschaften auf dieser Basis, die auch manchmal nur implizit vorausgesetzt wird, abgeleitet werden.

6.2 Prüfung der Erwartungstreue der exponentiellen Ausgleichung bei absolut konstantem Trend

Für einen Prozeß, der aus einem von einem reinen Zufallsprozeß überlagerten, konstanten Trend besteht, bietet sich als Prognose eine Extrapolation der Schätzung der Trendkomponente an. Da der Trend mit dem Mittelwert des Prozesses übereinstimmt, kann man nur dann von einer Prognose eine ausreichend große Genauigkeit erwarten, wenn sie auf einer guten Schätzung dieses Parameters beruht.

Eine Schätzung läßt sich als "gut" in bezug auf die Approximation eines unbekannten Parameters bezeichnen, wenn die Schätzfunktion, deren Realisierung sie ist, bestimmten Anforderungen genügt.¹⁾ Eine der wichtigsten Anforderungen ist das Kriterium der Erwartungstreue einer Schätzfunktion.

Es soll nun die exponentielle Ausgleichung, die als Schätzfunktion eines konstanten Trends dient, unter diesem Gesichtspunkt untersucht werden. Sie läßt sich dann als eine erwartungstreue Schätzfunktion bezeichnen, wenn ihr Erwartungswert dem zu schätzenden Parameter gleich ist. Sie ist asymptotisch erwartungstreu, wenn sie diese Eigenschaft erst besitzt, wenn die Anzahl der Beobachtungswerte gegen unendlich strebt.²⁾ Der Erwartungswert des Prozesses läßt sich aus dem folgenden Prozeßmodell gewinnen:

$$X_t = a_t + Z_t. \quad (6.1)$$

In diesem Modell sind a_t die Trendkomponente und Z_t der Zufallsprozeß der irregulären Komponente mit den oben angegebenen Eigenschaften.³⁾ Der Erwartungswert des Prozesses ist

$$E(X_t) = E(a_t + Z_t) \quad (6.2)$$

$$= a_t + E(Z_t) \quad (6.3)$$

$$= a_t. \quad (6.4)$$

1) Vgl. G. MENGES: Grundriß der Statistik. Teil 1: Theorie. Loc. cit., S. 298.

2) Vgl. dieselbe Quelle wie 1), S. 299.

3) Siehe Abschnitt 2.6 "Die Theorie der Zeitreihenzerlegung".

Führt man mit Hilfe der exponentiellen Ausgleichung Schätzungen für a_t durch, die als Prognosen für einen zukünftigen Zeitpunkt dienen sollen, dann läßt sich die geforderte Eigenschaft der Erwartungstreue an der Darstellung der Ausgleichung

$$x_{t,1}^* = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \alpha)^k x_{t-k} + (1 - \alpha)^n x_{t-n,1}^* \quad (6.5)$$

nachprüfen. Es soll angenommen werden, daß die Anfangsprognose $x_{t-n,1}^*$ dem ersten $t-n$ Perioden zurückliegenden Zeitreihenwert gleichgesetzt wurde, so daß man zu dem Ausdruck gelangt:

$$x_{t,1}^* = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \alpha)^k x_{t-k} + (1 - \alpha)^n x_{t-n} \quad (6.6)$$

Den Erwartungswert dieser Schätzfunktion bildet man dann auf die folgende Art:

$$E(x_{t,1}^*) = E\left(\alpha \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \alpha)^k x_{t-k} + (1 - \alpha)^n x_{t-n}\right) \quad (6.7)$$

Nimmt man die einzelnen Erwartungswerte der Größen auf der rechten Seite der Gleichung, dann läßt sich (6.7) weiter umformen in:

$$E(x_{t,1}^*) = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \alpha)^k E(x_{t-k}) + (1 - \alpha)^n E(x_{t-n}) \quad (6.8)$$

Da die Zufallsvariablen des Prozesses alle denselben Erwartungswert besitzen, nämlich den Mittelwert des Prozesses X_t , folgt weiter:

$$E(x_{t,1}^*) = E(x_t) \alpha \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \alpha)^k + (1 - \alpha)^n E(x_t) \quad (6.9)$$

$$= E(x_t) \left[\alpha \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \alpha)^k + (1 - \alpha)^n \right] \quad (6.10)$$

Wie oben in (6.4) festgestellt wurde, ist der Erwartungswert des Prozesses gleich dem Modellwert des konstanten Trends a_t . Deshalb ergibt sich:

$$E(x_{t,1}^*) = a_t \left[\alpha \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \alpha)^k + (1 - \alpha)^n \right] \quad (6.11)$$

An dem Klammerausdruck läßt sich erkennen, daß die exponentielle Ausgleichung bei einer endlichen Anzahl von Zeitreihenwerten verzerrte Schätzwerte für den Mittelwert des Prozesses ergibt, da die Summe seiner Glieder nicht gleich eins ist, wenn der Ausgleichsparameter in dem Bereich $0 < \alpha < 1$ liegt.

Die erste Summe der Klammer in (6.11) erreicht nur dann ihren Grenzwert von eins, wenn n gegen unendlich geht, während dann der letzte Summand der Klammer verschwindet. Die gleichen Folgerungen lassen sich ziehen, wenn der Anfangswert der Ausgleichung nicht dem Zeitreihenwert der Periode $t-n$ gleich ist, sondern mit Hilfe eines Prognoseverfahrens gewonnen wurde. Allgemein läßt sich deshalb schließen, daß die Schätzwerte, die durch die exponentielle Ausgleichung gewonnen werden, unter den gegebenen Annahmen über die Struktur des Prozesses verzerrt sind.

6.3 Prüfung der asymptotischen Erwartungstreue der exponentiellen Ausgleichung bei absolut konstantem Trend

Es soll jetzt noch überprüft werden, ob die exponentielle Ausgleichung asymptotisch unverzerrte Schätzwerte für die Trendkomponente liefert. Diese Prüfung kann anhand der theoretischen Beziehung der exponentiellen Ausgleichung

$$x_{t,h}^* = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \alpha)^n x_{t-n} \quad (6.12)$$

geschehen, in der die Anzahl der in die Berechnung der Schätzung einbezogenen Zeitreihenwerte gegen unendlich geht. Bildet man die Erwartungswerte dieser Funktion, dann erhält man

$$E(x_{t,h}^*) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \alpha)^n E(x_{t-n}) \quad (6.13)$$

Durch die Umformung dieser Beziehung in den Ausdruck

$$E(x_{t,h}^*) = E(x_t) \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \alpha)^n \quad (6.14)$$

gelangt man nach Einsetzen des Grenzwertes ¹⁾ der darin enthaltenen unendlichen geometrischen Reihe über die Gleichung

$$E(x_{t,h}^*) = E(x_t) \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)} \quad (6.15)$$

zu dem Ergebnis

$$E(x_{t,h}^*) = E(x_t) = a_t \quad (6.16)$$

da der erwähnte Grenzwert den Wert 1 hat. Das Ergebnis ²⁾ besagt, daß durch die exponentielle Ausgleichung in dieser Form asymptotisch unverzerrte Schätzwerte für die Trendkomponente gewonnen werden können.

1) Siehe Abschnitt 5.4 "Ausgleichung von Zeitreihen durch geometrisch gewogene gleitende Durchschnitte".

2) Brown zieht aus diesem Ergebnis die Folgerung, daß man die durch die exponentielle Ausgleichung gewonnenen Werte einen Durchschnitt nennen kann. Siehe R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 101.

H. PRILLWITZ und W. WETZEL haben die exponentielle Ausgleichung und ihre Weiterentwicklung für Trendmodelle höherer Ordnung auf die Erwartungstreue untersucht.¹⁾ Sie gehen jedoch von vornherein von der Voraussetzung aus, daß eine unendliche Anzahl von Zeitreihenwerten vorliegt, oder anders ausgedrückt, daß die "gesamte Vergangenheit"²⁾ der Zeitreihe bekannt sei.³⁾ Geht man hiervon aus, dann gelangt man sofort zu dem Ergebnis, daß der Erwartungswert der exponentiellen Ausgleichung dem Mittelwert des Prozesses gleich ist.⁴⁾

Dieses Ergebnis kann jedoch strenggenommen nur aufgrund der Implikation zustande kommen, daß der die Zeitreihe erzeugende Prozeß im Mittelwert zeitunabhängig ist. Unter dieser grundlegenden Annahme gelangt man jedoch, wenn man das Anfangswertproblem nicht ausklammert, zu den Ergebnissen der Abschnitte 6.2 und des vorliegenden Abschnitts, nämlich daß die Schätzungen der exponentiellen Ausgleichung im allgemeinen verzerrt, jedoch asymptotisch unverzerrt sind. Als asymptotisch unverzerrt gilt dagegen bei H. PRILLWITZ und W. WETZEL dieses Verfahren für solche Zeitreihen, die im Zeitablauf Strukturbrüche aufweisen. Da in diesem Fall aber gegenüber der Annahme dieses Abschnitts,

-
- 1) W. WETZEL: Univariable mikro-ökonomische Prognosemodelle. Loc. cit., 155-186 und H. PRILLWITZ: Prognosefunktionen für Polynome nach der Methode der exponentiellen Gewichtung und nach der Methode der kleinsten Quadrate. (Berichte aus dem Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik und aus dem Institut für Angewandte Statistik der Freien Universität Berlin, herausgegeben von H. Münzner und W. Wetzels, Heft 2), Würzburg: Physika-Verlag, 1967, 76 S.
 - 2) W. WETZEL: Exponentiell gewichtete, univariable Prognosemodelle. Loc. cit., 35 und W. WETZEL: Univariable mikro-ökonomische Prognosemodelle. Loc. cit., 159.
 - 3) Vgl. H. PRILLWITZ: Loc. cit., S. 4.
 - 4) Vgl. H. PRILLWITZ: Loc. cit., S. 20 und W. WETZEL: Univariable mikro-ökonomische Prognosemodelle. Loc. cit., 163 und 183.

wenn auch nur implizit, ein anderes Prozeßverhalten vorausgesetzt wird, für das ein anderes Prozeßmodell zugrundegelegt werden muß, soll eine Untersuchung in dieser Richtung in einem besonderen Abschnitt vorgenommen werden.¹⁾

6.4 Die Bestimmung des optimalen Ausgleichsparameters bei absolut konstantem Trend

Die Frage nach der Bestimmung des Ausgleichsparameters wurde bereits bei dem Anfangswertproblem angeschnitten. Welcher Wert des Ausgleichsparameters läßt sich aber unter diesen Annahmen als ein bester Wert aus dem gesamten möglichen Bereich, in dem α liegen kann, bestimmen? Daraus folgt sofort die Frage nach dem Optimalitätskriterium, das man verwenden soll, um den Parameter als optimal bezeichnen zu können.

Bei einem Prognoseproblem bietet sich als Maß für die Güte eines bestimmten, in einem Prognosesystem variierbaren Parameters die Differenz zwischen dem Prognosewert und dem tatsächlich eintretenden aktuellen Wert der Zeitreihe an.²⁾ Als Optimalitätskriterium verwendet man deshalb den mittleren quadratischen Prognosefehler. Ein Ausgleichsparameter wird dann als optimal bezeichnet, wenn der Erwartungswert der Prognosefehlerquadrate ein Minimum ist.

Bildet man den Prognosefehler im Zeitpunkt t bei einer mit Hilfe der exponentiellen Ausgleichung vor h Perioden durchgeführten Prognose, dann erhält man die Beziehung:

$$e_{t,h} = x_t - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \alpha)^n x_{t-h-n} \quad (6.17)$$

1) Siehe Abschnitt 7.2 "Prüfung der Erwartungstreue der exponentiellen Ausgleichung bei lokal konstantem Trend."

2) Vgl. N. WIENER: Loc. cit., S. 13.

Berechnet man das Quadrat dieses Ausdrucks und bildet die Erwartungswerte der Summanden, dann gelangt man für den mittleren quadratischen Prognosefehler zu der folgenden einfachen Form¹⁾, in der $\sigma_{X_t}^2$ die Varianz des Prozesses X_t darstellt:

$$E(e_{t,h}^2) = \frac{2 \sigma_{X_t}^2}{2 - \alpha} \quad (6.18)$$

Es soll noch erwähnt werden, daß dieses Ergebnis vor allem deshalb so einfach ist, weil voraussetzungsgemäß die Zufallsvariablen des Prozesses unkorreliert sind.

An dem gewonnenen Ergebnis erkennt man sofort, daß der optimale Ausgleichsparameter den Wert Null hat, da dann der Quotient für den vorgegebenen Variationsbereich von α , nämlich $0 \leq \alpha \leq 1$, am kleinsten ist.²⁾ Die Bedeutung dieses Ergebnisses kann an dem Grundprinzip der exponentiellen Ausgleichung erläutert werden.

Durch Einsetzen eines Ausgleichsparameters mit dem Wert Null in die Beziehung

$$x_{t,h}^* = \alpha x_t + (1 - \alpha) x_{t-1,h}^* \quad (6.19)$$

erhält man die Gleichung

$$x_{t,h}^* = x_{t-1,h}^* \quad (6.20)$$

1) Vgl. R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 119.

2) Dieselbe Quelle wie 1), S. 120.

7. Eigenschaften von Prognosen auf der Grundlage der exponentiellen Ausgleichung bei lokal konstantem Trend

7.1 Das Zeitreihenmodell eines lokal konstanten Trends

Aus der Theorie der Zeitreihenzerlegung geht hervor, daß bei einem konstanten Trend sich die Zeitreihe zumindest lokal durch eine Konstante repräsentieren läßt. Die üblichen Annahmen über die Zufallskomponente der Zeitreihe sind die, daß sie einen Mittelwert von Null und eine endliche Varianz besitzt, und außerdem ihre Autokovarianz für alle Zeitabstände einen Wert von Null hat. Diese Annahmen bedeuten, daß der die Zeitreihe erzeugende Prozeß in diesem lokalen Zeitbereich stationär im weiteren Sinne ist, da sein Mittelwert und die zweiten Momente seiner Verteilung konstant sind.

Gelten diese Annahmen ausdrücklich nur für einen von Zeitpunkt zu Zeitpunkt von neuem festgelegten Zeitbereich, dann bedeutet das gleichzeitig, daß der Gesamtprozeß, über alle Zeitbereiche betrachtet, nichtstationär ist, weil zumindest sein Mittelwert in Abhängigkeit von der Zeit variiert. Welcher Art diese Änderungen der Parameter des Prozesses sind, ob sie deterministische oder stochastische Größen darstellen, bleibt unter diesen Annahmen ungeklärt. Fest steht nur, daß der Prozeß in seinem Mittelwert im Zeitablauf Veränderungen unterliegt. Die Auswirkungen, die ein solches Prozeßverhalten auf die durch eine exponentielle Ausgleichung gewonnenen Prognosewerte hat, sollen an einem Beispiel im nächsten Abschnitt erläutert werden.

7.2 Prüfung der Erwartungstreue der exponentiellen Ausgleichung bei lokal konstantem Trend

Ändert sich bei einem konstanten Trend der Wert des ihn repräsentierenden Koeffizienten zu einem bestimmten Zeitpunkt um einen bestimmten Betrag, der dann in den folgenden Perioden nicht wieder verschwindet, so läßt sich zeigen, daß dadurch in den Perioden nach diesem Strukturbruch systematische Verzerrungen in die Prognosewerte eingeführt werden. Dieser Zusammenhang kann mit Hilfe einer Zeitreihe demonstriert werden, deren Beobachtungswerte bis zu einem bestimmten Zeitpunkt alle den Wert Null haben und die keine Zufallsstörung enthält. Vollzieht sich jedoch im Zeitpunkt t in dieser Zeitreihe ein Strukturwandel derart, daß die Glieder der Zeitreihe von diesem Zeitpunkt ab ihren Wert von Null auf eins ändern und ihn in dieser Höhe in den darauffolgenden Perioden auch beibehalten, dann ergibt sich bei Anwendung der exponentiellen Ausgleichung auf diese Zeitreihe im Zeitpunkt t die folgende Prognose für eine Periode in die Zukunft:

$$x_{t,1}^* = \alpha \cdot 1 + (1 - \alpha) \cdot 0 = \alpha \quad . \quad (7.1)$$

Der Prognosewert für den Zeitpunkt t im Zeitpunkt $t-1$ ist wegen des deterministischen Modells 0. Die Prognose für den Zeitpunkt $t+1$ erreicht also genau den Bruchteil α des tatsächlichen Wertes in $t+1$, wenn dieser voraussetzungsgemäß den Wert 1 hat.

Führt man in der Prognosebildung im Zeitpunkt $t+1$ für die nächste Periode auf die gleiche Weise fort, also mit

$$x_{t+1,1}^* = \alpha \cdot 1 + (1 - \alpha) \alpha \quad , \quad (7.2)$$

dann nähert sich die Prognose weiter an den neuen Trendwert

an. In der Periode $t+2$ erhält man:

$$x_{t+2,1}^* = \alpha 1 + \alpha (1 - \alpha) + \alpha (1 - \alpha)^2 \quad . \quad (7.3)$$

Daraus läßt sich eine Regelmäßigkeit der Anpassung an den neuen Trendwert erkennen, der n Perioden nach dem Zeitpunkt t die folgende Prognose ergibt:

$$x_{t+n,1}^* = \alpha \sum_{i=0}^n (1 - \alpha)^i \quad . \quad (7.4)$$

Wächst n gegen unendlich, dann strebt der Wert dieser Summe ihrem Grenzwert zu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \sum_{i=0}^n (1 - \alpha)^i = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)} = 1 \quad . \quad (7.5)$$

Das Ergebnis besagt, daß die exponentielle Ausgleichung im Falle eines Strukturbruchs in einem konstanten Trend asymptotisch unverzerzte Schätzungen der Trendkomponente liefert.¹⁾

7.3 Die Abhängigkeit der Anpassungsfähigkeit und Stabilität der exponentiellen Ausgleichung von der Größe des Ausgleichsparameters bei Strukturänderungen des Prozesses

Aus den Ausführungen geht hervor, daß die Geschwindigkeit der Anpassung an ein neues Trendniveau von der Größe der Ausgleichskonstanten abhängt. Je höher man diesen Wert ansetzt, desto schneller werden sich die Prognosen einer

1) H. PRILLWITZ und W. WETZEL haben diese Eigenschaft des Verfahrens für den allgemeinen Fall eines Trends, der durch ein Polynom mit einer endlichen Anzahl von Koeffizienten beschrieben wird, bewiesen: Siehe H. PRILLWITZ: Loc. cit., S. 20-24 und W. WETZEL: Univariable mikro-ökonomische Prognosemodelle. Loc. cit., 11.

neuen Entwicklung anpassen. Bei einem geringen Wert dagegen wird das Verfahren gegenüber solchen einmaligen Strukturänderungen träger.

Zwei wesentliche Eigenschaften der Ausgleichung durch exponentielle Gewichtung der Zeitreihenwerte kann man an diesen Darlegungen erkennen: Theoretisch gleicht das Verfahren Strukturänderungen erst nach einem unendlich langen Zeitintervall aus. Praktisch hat es jedoch die Fähigkeit, Strukturänderungen mit ausreichender Genauigkeit zu folgen.¹⁾

Durch die entsprechende Wahl des Ausgleichsparameters ist es möglich, die Anpassungsfähigkeit des Verfahrens an Strukturänderungen zu bestimmen. Würde man daraus die Folgerung ziehen, daß man den Glättungsparameter möglichst groß wählen sollte, damit die Prognosen möglichst schnell auf Strukturänderungen antworten, dann kommt man dadurch in den Konflikt, die Stabilität der Prognosen verringert zu haben, wie es sich in einer Vergrößerung der Varianz der Schätzung der Trendkomponente niederschlägt.²⁾

Außerdem läßt sich erkennen, daß die Ausgleichung bei einem großen Wert von α Prognosen liefert, die stark von den Zufallsschwankungen um den Trend beeinflußt werden, da den jüngsten Beobachtungen gegenüber den älteren Zeitreihenwerten ein sehr hohes Gewicht beigelegt wird. Da man aber gerade diese Zufallsschwankungen möglichst gut ausgleichen will und bei starker Variation der irregulären Komponente geneigt ist, einen kleinen Ausgleichsparameter zu wählen, deutet sich an, daß man einen Kompromiß bei seiner Wahl eingehen muß, um möglichst gute Prognosen zu erhalten. Es sollen nämlich einerseits Strukturänderungen der systematischen

1) Vgl. R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 113.

2) Vgl. R.G. BROWN und R.F. MEYER: Loc.cit., 680.

Komponente möglichst schnell berücksichtigt und andererseits die Auswirkungen von Zufallsschwankungen um den Trend möglichst gut reduziert werden.

7.4 Die Bestimmung des optimalen Ausgleichsparameters bei lokal konstantem Trend

Aus den Überlegungen des letzten Abschnittes heraus stellt sich erneut das Problem der Bestimmung des optimalen Ausgleichsparameters. Läßt sich aber überhaupt nach dem Kriterium eines minimalen mittleren Prognosefehlerquadrats, das auch hier als Optimalitätskriterium dienen soll¹⁾, und unter den Annahmen über die Struktur des Prozesses der beste Ausgleichsparameter bestimmen?

Diese Frage läßt sich unter Betrachtung der mathematischen Form des Prognosefehlerquadrats

$$e_{t,h}^2 = (x_t - x_{t-h,h}^*)^2, \quad (7.6)$$

in der durch die Prognose $x_{t-h,h}^*$ die Abhängigkeit des Prognosefehlers von dem Ausgleichsparameter eingeht, und unter Berücksichtigung der Modellvoraussetzungen beantworteten.

Betrachtet man die angegebene Gleichung unter dem Aspekt des lokal stationären Verhaltens des Prozesses, dann kann man auf die Ergebnisse des Abschnitts 6.4 über die Bestimmung des optimalen Ausgleichsparameters der exponentiellen Ausgleichung bei ihrer Anwendung auf stationäre Prozesse verweisen.

1) Siehe Abschnitt 6.4 "Die Bestimmung des optimalen Ausgleichsparameters bei absolut konstantem Trend."

Sieht man den Prozeß als Ganzes über diese lokalen Bereiche hinaus, dann erkennt man, daß in die in Abhängigkeit vom Ausgleichsparameter zu minimierende Funktion (7.6) Größen eingehen, die in der Zeitreihenanalyse Strukturbrüche genannt werden und die in den Modellvoraussetzungen nicht genau quantitativ bestimmt sind. Liegt nur die allgemeine Information vor, daß der Mittelwert des Prozesses sich verschieben kann, oder seine Varianz sich verändert, fehlen aber die genauen Angaben, ob sich diese Größen deterministisch oder stochastisch verhalten, und ob sie nach der Klärung dieser Punkte genau bestimmt sind, dann kann man weder feststellen, ob die obige Funktion (7.6) ein Minimum besitzt, noch ihren genauen Wert bestimmen.

Die Bestimmung eines optimalen Ausgleichsparameters ist deshalb unter diesen Voraussetzungen nicht möglich.

7.5 Eine praktische Möglichkeit zur Bestimmung des Ausgleichsparameters

Für die gleichen Annahmen über die Prozeßstruktur, die theoretisch eine optimale Bestimmung des Ausgleichsparameters nicht zulassen, gibt es eine andere auf dem Vergleich zu einem anderen Ausgleichsverfahren beruhende Bestimmung seines Wertes. Die Überlegungen in diesem Abschnitt scheinen besondere im Hinblick auf die hier gemachten realistischen Annahmen über die Struktur des Prozesses, wie sie im Abschnitt 7.1 erläutert wurden, von Bedeutung zu sein. Sie sind durch die Voraussetzung eines lokal stationären Verhaltens wirklichkeitsnäher als die Annahmen des Abschnitts 6.1 bei absolut konstantem Trend.

Da die "glättende" Wirkung der Mittelwertbildung in der Varianz der Schätzung zum Ausdruck kommt¹⁾, kann man einen Vergleich zwischen einem ungewogenen gleitenden Mittelwert und einem gewogenen gleitenden Mittelwert durchführen, indem man die Anzahl der Perioden mit gleitendem Gewicht zur Höhe des Ausgleichsparameters für äquivalente Varianzen der Schätzung beider Verfahren in Beziehung setzt.

Der Prozeß Y_t , der aus der gleitenden Mittelwertbildung der Zeitreihenwerte eines Prozesses unkorrelierter Zufallsvariabler Z_t mit konstanter Varianz $\sigma_{Z_t}^2$ und den Gewichten $a_1, a_2, \dots, a_n$ gebildet wird, hat die Varianz²⁾

$$\sigma_{Y_t}^2 = \sigma_{Z_t}^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 . \quad (7.7)$$

Für einen gleitenden ungewogenen Durchschnitt sind die Gewichtskoeffizienten $a_1, a_2, \dots, a_n$ alle gleich $\frac{1}{n}$. Als Varianz des Prozesses ergibt sich deshalb

$$\sigma_{Y_t}^2 = \sigma_{Z_t}^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \quad (7.8)$$

$$= \frac{\sigma_{Z_t}^2}{n} . \quad (7.9)$$

-
- 1) Vgl. H. KELLERER: Theorie und Technik des Stichprobenverfahrens (Einzelschriften der Deutschen Statistischen Gesellschaft, Heft Nr. 5), 3. Auflage, München: 1963, S. 32.
 2) Vgl. M.G. KENDALL und A. STUART: Loc. cit., S. 382.

Die entsprechende Größe für die geometrische Gewichtung der Zeitreihenwerte erhält man auf die gleiche Weise für die Gewichte α , $\alpha(1-\alpha)$, ... aus der Beziehung

$$\sigma_{Y_t}^2 = \sigma_{Z_t}^2 \sum_{i=0}^n \alpha^2 (1-\alpha)^i \quad (7.10)$$

Da hier wieder die Voraussetzung gemacht wird, daß das Gewichtungsschema unendlich viele Glieder umfaßt, läßt sich der Grenzwert der Summe der Gewichte in diese Beziehung einsetzen:

$$\sigma_{Y_t}^2 = \sigma_{Z_t}^2 \frac{\alpha^2}{1 - (1-\alpha)^2} \quad (7.11)$$

Aus (7.11) ergibt sich unmittelbar ¹⁾:

$$\sigma_{Y_t}^2 = \sigma_{Z_t}^2 \frac{\alpha}{2-\alpha} \quad (7.12)$$

Betrachtet man solche ungewogenen gleitenden Mittelwerte mit solchen gewogenen gleitenden Mittelwerten als äquivalent, die dieselbe Reduktion der Varianz der Schätzung bewirken, dann erhält man für übereinstimmende $\sigma_{Y_t}^2$ der Ausgleichsverfahren die Relation zwischen der Anzahl der im gleitenden Mittelwert einbezogenen Zeitreihenwerte und dem Ausgleichsparameter α . Diese Beziehung geht also aus

$$\frac{\sigma_{Z_t}^2}{n} = \sigma_{Z_t}^2 \frac{\alpha}{2-\alpha} \quad (7.13)$$

1) Vgl. R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 110.

hervor und geht nach einigen Umformungen in die Form

$$\alpha = \frac{2}{n + 1} \quad (7.14)$$

über¹⁾. Die folgende Tabelle 2 zeigt aus dieser Relation gewonnene und in ihrem Sinne äquivalente Größen von n und α .

Tabelle 2:

In Bezug auf die Größe der Varianz der Schätzung äquivalente Werte eines ungewogenen gleitenden Mittelwertes und der exponentiellen Ausgleichung (aufgerundet nach der dritten Stelle nach dem Komma)

Anzahl der Zeitreihenwerte im ungewogenen gleitenden Mittelwert n	Ausgleichsparameter der expo- nentiellen Ausgleichung α
3	0,500
4	0,400
5	0,333
6	0,286
7	0,250
8	0,222
9	0,200
10	0,182
12	0,154
18	0,106
24	0,080

1) Vgl. R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction.
Loc. cit., S. 110.

Die Aufstellung der Tabelle 2 zeigt, daß einem α -Wert von 0,5 eine Anzahl von nur 3 Zeitreihenwerten, die in den ungewogenen gleitenden Mittelwert einbezogen werden, entspricht. Man kann deshalb vermuten, daß die obere Grenze für die Höhe des Ausgleichsparameters im praktischen Fall niedriger liegen wird. Angesichts der starken Zufallsschwankungen wirtschaftlicher Zeitreihen scheinen ungewogene gleitende Durchschnitte, die aus mehr als neun Gliedern bestehen, und denen ein α -Wert von höchstens 0,2 entspricht, realistischer zu sein als solche, die nur aus sehr wenigen Werten zusammengesetzt sind.

Für einen gleitenden Mittelwert von 12 Perioden liegt der α -Wert bei 0,154, also im Bereich zwischen 0,2 und 0,1. In diesem Bereich wird er bei praktischen Anwendungen auch häufig lokalisiert. Welche Faktoren seine genaue Höhe bestimmen, kann nur unter anderen Annahmen über den Prozeßverlauf gezeigt werden, wie in den folgenden Abschnitten erläutert werden soll.

Es muß jedoch betont werden, daß zwar für äquivalente Werte von α und n die gleiche theoretische Reduktion des Standardfehlers der Schätzung erreicht wird, die Wirkung auf die Eliminierung einer Saisonfigur bei beiden Verfahren aber unterschiedlich ist.¹⁾ Bei einem konstanten Trend läßt sich z.B. ein zwölfgliedriger ungewogener gleitender Durchschnitt dazu verwenden, eine Saisonfigur mit einer Periode von 12 Monaten auszugleichen, während eine exponentielle Ausgleichung mit einem Glättungsparameter in der Höhe von 0,154 nicht zu einem solchen Ausgleich führt.

1) Vgl. R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 108; siehe auch das Beispiel bei W. WETZEL: Univariable mikro-ökonomische Prognosemodelle. Loc. cit., 162.

8. Eigenschaften von Prognosen auf der Grundlage der exponentiellen Ausgleichung bei konstantem Trend mit Zufallswegprozeß im Mittelwert

8.1 Allgemeine Eigenschaften von stochastischen Prozessen, für die die exponentielle Ausgleichung optimale Prognosen ergibt

Bevor der letzte hier zu betrachtende konstante Trendtyp genau beschrieben wird, soll versucht werden, durch die Darstellung allgemeiner Beziehungen zwischen Prognosesystemen und nichtstationären Prozessen Kriterien zu finden, die ein Prozeß erfüllen muß, um durch ein bestimmtes Prognosesystem optimale Prognosen seiner Realisationen berechnen zu können.

Zur Bestimmung von solchen Eigenschaften, die ein nichtstationärer Prozeß besitzen muß, damit der Versuch der Bestimmung eines optimalen Ausgleichsparameters bei der exponentiellen Ausgleichung überhaupt einen Sinn haben soll, sei von einem sehr allgemeinen Fall eines nichtstationären Prozesses ausgegangen.

Es sei angenommen, ein nichtstationärer Prozeß von Zufallsvariablen X_{t+1} lasse sich auf die folgende Art darstellen:¹⁾

$$X_{t+1} = \sum_{i=0}^{\infty} w_i X_{t-i} + Y_{t+1} \quad (8.1)$$

Der Wert der Zufallsvariablen X_{t+1} ergibt sich aus einer

1) Vgl. G.E.P. BOX und G.M. JENKINS: Some statistical aspects. Loc. cit., 312.

linearen Kombination der Variablen X_{t-i} ($i = 0, \dots, \infty$), die mit den Gliedern w_i einer Folge von reellen Zahlen multipliziert werden, vermehrt um eine zufällige Größe Y_{t+1} , die dem Prozeß Y_t von unkorrelierten Zufallsvariablen mit einem Mittelwert von Null und gleicher Varianz angehören soll. Außerdem sei vorausgesetzt, daß die Prozesse X_t und Y_t voneinander unabhängig sind.

Will man nun im Zeitpunkt t für den Zeitpunkt $t+1$ aus den Zeitreihenwerten des Prozesses eine Prognose $x_{t,1}^*$ gewinnen, und benutzt man dazu ein lineares System der Form

$$x_{t,1}^* = \sum_{i=0}^{\infty} v_i x_{t-i} \quad , \quad (8.2)$$

in dem die v_i Gewichte aus reellen Zahlen für die Zeitreihenwerte sein sollen, so besteht zumindest in der linearen Form und in der Einbeziehung aller Zeitreihenwerte aus der Vergangenheit des Prozesses eine Ähnlichkeit zum Gewichtungsverfahren der exponentiellen Ausgleichung.

Der Prognosefehler im Zeitpunkt $t+1$ lautet:

$$e_{t+1,1} = x_{t+1} - x_{t,1}^* \quad . \quad (8.3)$$

Setzt man die Darstellung des Prozesses (8.1) und die der Prognosefunktion (8.2) in diese Gleichung ein, dann erhält man:

$$e_{t+1,1} = \sum_{i=0}^{\infty} w_i x_{t-i} - \sum_{i=0}^{\infty} v_i x_{t-i} + y_{t+1} \quad . \quad (8.4)$$

Faßt man die ersten beiden Ausdrücke der rechten Seite der Gleichung (8.4) noch zusammen, dann ergibt sich

$$e_{t+1,1} = \sum_{i=0}^{\infty} (w_i - v_i) x_{t-i} + y_{t+1} \quad . \quad (8.5)$$

Wird das Quadrat des Prognosefehlers gebildet, und werden gleichzeitig für die sich daraus ergebenden Größen die Erwartungswerte eingesetzt, dann erhält man die theoretische Form des mittleren quadratischen Prognosefehlers.

In seiner folgenden Darstellung (8.6) treten nur einzelne und keine gemeinsamen Ausdrücke in den Zufallsvariablen X_t und Y_t auf, da vorausgesetzt wurde, daß sie unabhängig sind und deshalb ihre sämtlichen Kovarianzen gleich Null sind.

$$E(e_{t+1,1})^2 = E\left[\sum_{i=0}^{\infty} (w_i - v_i) x_{t-i}\right]^2 + E(y_{t+1})^2 \quad (8.6)$$

Das angegebene Prognoseverfahren des nichtstationären Prozesses ergibt dann optimale Prognosen, wenn der Erwartungswert der Prognosefehlerquadrate ein Minimum ist. Das ist offensichtlich dann der Fall, wenn die w_i mit den v_i übereinstimmen:

$$w_i = v_i \text{ für } i = 0, 1, 2, \dots \quad (8.7)$$

Werden die v_i so gewählt, daß diese Bedingung erfüllt ist, dann wird der erste Ausdruck in der Darstellung (8.6) Null, und die Prognosefehler sind, wie aus der Gleichheit der Erwartungswerte der verbleibenden Quadrate der Zufallsvariablen ersichtlich ist, mit den Zufallsvariablen Y_t identisch.

Diese Überlegungen sollen nun auf die exponentielle Ausgleichung übertragen werden. Dabei soll von der folgenden Form ihrer Darstellung als Prognosefunktion ausgegangen

werden:

$$x_{t,1}^* = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \alpha)^i x_{t-i} \quad (8.8)$$

Entsprechend den obigen Ausführungen kann man erkennen, daß eine solche Prognose für den Prozeß

$$x_{t+1} = \beta \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \beta)^i x_{t-i} + y_{t+1} \quad (8.9)$$

dann optimal ist, wenn die Bedingung der Übereinstimmung der Koeffizienten α_1 und β_1 erfüllt ist. Da aber das Verhalten des Prozesses voraussetzungsgemäß nicht stationär ist, liefert diese Aussage keinen wesentlichen Anhaltspunkt über die genaue Struktur des Prozesses.

Geht man von der Annahme aus, daß die obige exponentielle Ausgleichung (8.8) optimale Prognosen im Sinne minimaler mittlerer Prognosefehlerquadrate ergibt, dann kann man diesen Tatbestand auch durch die Grundbeziehung der exponentiellen Ausgleichung festhalten:

$$x_{t,1}^* = \alpha x_t + (1 - \alpha) x_{t-1,1}^* \quad (8.10)$$

Diese Grundbezeichnung läßt sich auch auf die folgende Art darstellen:

$$x_{t,1}^* = x_{t-1,1}^* + \alpha (x_t - x_{t-1,1}^*) \quad (8.11)$$

In der Klammer der letzten Gleichung ist der Prognosefehler $e_{t,1}$ durch den Ausdruck

$$e_{t,1} = x_t - x_{t-1,1}^* \quad (8.12)$$

enthalten, so daß sich die Beziehung (8.11) auch in der

Form

$$x_{t,1}^* - x_{t-1,1}^* = \alpha e_{t,1} \quad (8.13)$$

schreiben läßt. Die linke Seite der Gleichung stellt die Differenz zweier aufeinanderfolgender Prognosen dar, die sich auch unter Verwendung des Differenzenoperators Δ so darstellen läßt:¹⁾

$$\Delta x_{t+1}^* = \alpha e_{t,1} \quad (8.14)$$

Vergegenwärtigt man sich noch einmal, daß der Ausgleichsparameter α einen optimalen Wert in Bezug auf das angegebene Kriterium angenommen haben soll, dann erkennt man, daß die letzte Beziehung in Analogie zum allgemeinen Fall eine optimale Prognose für den Prozeß

$$\Delta X_{t+1} = \alpha Y_t + \Delta Y_{t+1} \quad (8.15)$$

ergibt²⁾. Dieser Zusammenhang resultiert also aus der Erkenntnis, daß der Prognosefehler $e_{t,1}$ für den obigen Prozeß bei optimalem Ausgleichsparameter den Zufallsvariablen Y_t gleich ist, und basiert in seinem Aufbau auf denselben Prinzipien wie der Aufbau der obigen Prozeßmodelle (8.1) und (8.9).

Löst man die rechte Seite der Gleichung (8.15) weiter auf und formt sie um, dann erhält man

$$\Delta X_{t+1} = Y_{t+1} - (1 - \alpha) Y_t \quad (8.16)$$

Diese Beziehung, die mit ΔX_{t+1} die ersten Differenzen des die Zeitreihe erzeugenden stochastischen Prozesses

1) Zur Definition und Bedeutung des Differenzenoperators siehe S. GOLDBERG: Differenzengleichungen und ihre Anwendung in Wirtschaftswissenschaft, Psychologie und Soziologie. München: R. Oldenbourg Verlag, 1968, S. 30 f.

2) Vgl. G.E.P. BOX und G.M. JENKINS: Some statistical aspects. Loc. cit., 313.

und mit Y_t und Y_{t+1} die Zufallsvariablen eines stationären reinen Zufallsprozesses enthält, ist von größerer Bedeutung als die zunächst gewonnenen allgemeinen Aussagen über die Struktur des nichtstationären Prozesses, wie sie durch (8.9) zum Ausdruck kommen.

Der Wert dieser Beziehung liegt darin, daß sie die erste Differenz des Zeitreihenprozesses X_t in Abhängigkeit eines stationären Prozesses darstellt. Die Kombination der Zufallsvariablen des Prozesses Y_t in der vorliegenden Form (8.16) bildet nämlich einen gleitenden Durchschnitt vom Grade 1.¹⁾ Da ein gleitender Durchschnitt, der aus einer linearen Kombination von Zufallsvariablen eines stationären Prozesses besteht, selbst stationär ist,²⁾ ist ein Kriterium gefunden worden, das angibt, für welche Art nichtstationärer Prozesse die exponentielle Ausgleichung optimale Prognosen liefert. Prognosen, die durch die exponentielle Ausgleichung gewonnen werden, sind für solche Prozesse optimal, deren erste Differenzen als stationäre Prozesse gleitender Durchschnitte vom Grade 1 dargestellt werden können.³⁾

Dieses Ergebnis hat auch eine erhebliche praktische Bedeutung. Es bedeutet nämlich, daß man durch die Überprüfung

1) Vgl. G.E.P. BOX und G.M. JENKINS: Some statistical aspects. Loc. cit., 313.

2) Siehe Abschnitt 2.4 "Drei stationäre stochastische Prozesse".

3) Ähnlich auch P.J. HARRISON: Exponential smoothing. Loc. cit., 824 f.

der ersten Differenzen einer Zeitreihe feststellen kann, ob das richtige Prognoseverfahren durch die exponentielle Ausgleichung, so wie sie bisher dargestellt wurde, gegeben ist. Da ein stationärer Prozeß durch die Zeitinvarianz seiner Verteilung und damit seiner Parameter gekennzeichnet ist, bietet sich zur Durchführung der Überprüfung die Mittelwertbildung aus den ersten Differenzen der Zeitreihenwerte an. Ebenso wie die Prüfung des Mittelwertes der Zeitreihenwerte auf seine Konstanz im Zeitablauf, ließe sich die Schätzung der Varianz der ersten Differenzen der Zeitreihenwerte unter dem gleichen Gesichtspunkt zur Prüfung des stationären Verhaltens des der Zeitreihe der ersten Differenzen zugrundeliegenden Prozesses heranziehen.

Auch die Schätzung der Kovarianzen der ersten Differenz der Zeitreihenwerte macht eine Aussage über die Eignung der exponentiellen Ausgleichung für die Prognostizierung der Realisationen des Prozesses. Ausgangspunkt ist dabei, daß ein Prozeß, der sich, wie aus (8.16) ersichtlich ist, als ein gleitender Mittelwert darstellen läßt, autokorreliert ist, da sich die Zeitintervalle, aus denen diese Realisationen für die Mittelwertbildung herangezogen werden, jeweils für eine bestimmte Anzahl aufeinanderfolgender Werte überlappen.

In der obigen Ableitung (8.16) hatte sich gezeigt, daß die exponentielle Ausgleichung für solche Prozesse optimale Prognosen ergeben kann, deren erste Differenzen sich jeweils als gleitender Durchschnitt aus zwei unabhängigen, zeitlich eine Periode auseinanderliegenden Zufallsvariablen darstellen läßt. Das bedeutet, daß zwei zeitlich benachbarte Durchschnitte jeweils nur ein Glied in ihrem linearen System gemeinsam haben. Die ersten Differenzen eines Prozesses, die zwei Perioden oder mehr zeitlich auseinanderliegen, können, wie aus der Darstellung (8.16)

hervorgeht, nämlich keinen gemeinsamen Summanden mehr haben. Theoretisch kann man also folgern, daß nur zwei aufeinanderfolgende erste Differenzen des Prozesses miteinander korrelieren, während für größere Zeitabstände ihre Autokorrelation gleich Null ist. ¹⁾

Praktisch kann man deshalb anhand der Schätzungen der Autokovarianzen des Prozesses der ersten Differenzen für unterschiedliche Zeitabstände der Zeitreihenwerte nachprüfen, ob man die exponentielle Ausgleichung mit Erfolg anwenden kann. Sind die Kovarianzen einer Zeitreihe für Zeitabstände größer als eins nicht annähernd gleich Null, dann ist zu vermuten, daß ein Prozeß die Zeitreihe erzeugt hat, der andere als die hier geforderten Eigenschaften hat. In diesem Fall liegt es dann nahe, ein anderes Modell zu wählen.

8.2 Das Zeitreihenmodell eines konstanten Trends mit Zufallsweg im Mittelwert

Ein Prozeß, dessen erste Differenzen als gleitender Mittelwert von unabhängigen Zufallsvariablen dargestellt werden kann, wurde bereits modellhaft beschrieben.²⁾ Es ist ein nichtstationärer Prozeß, dessen Trendkomponente a_t einen Zufallsweg beschreitet. Überlagert wird dieser

-
- 1) Vgl. G.E.P. BOX und G.M. JENKINS: Further contributions to adaptive quality control: Simultaneous estimation of dynamics: Non-zero costs. Bulletin of the International Statistical Institute, Proceedings of the 34th Session, 40 (1963), 949.
 - 2) Siehe Abschnitt 3.4 "Ein Zufallswegmodell für Güter mit konstantem Absatzverlauf".

Trend noch durch einen Prozeß unabhängiger Zufallsfehler Z_t mit einem Mittelwert von Null und konstanter endlicher Varianz, so daß das Modell des Prozesses, aus dem die Zeitreihenwerte x_t stammen, wie folgt dargestellt werden kann:

$$x_t = a_t + Z_t \quad . \quad (8.17)$$

Die Trendkomponente beschreibt einen Zufallsweg der Form:

$$a_t = a_{t-1} + Y_t \quad . \quad (8.18)$$

Aus diesem Modell des Zufallswegs der Trendkomponente läßt sich die folgende Beziehung ableiten:

$$\Delta a_t = a_t - a_{t-1} = Y_t \quad . \quad (8.19)$$

Sie sagt aus, daß die erste Differenz der Trendkomponente als ein Prozeß unabhängiger Zufallsvariabler aufgefaßt werden kann. Diese Beziehung läßt sich zusammen mit der ersten Differenz des Zeitreihenmodells für den Nachweis der geforderten Eigenschaften verwenden.

Durch Anwendung des Differenzenoperators auf das grundlegende Trendmodell (8.17) erhält man

$$\Delta x_t = \Delta a_t + \Delta Z_t \quad . \quad (8.20)$$

Daraus ergibt sich durch das Einsetzen des angegebenen Zufallsprozesses für die erste Differenz der Trendkomponente und durch das Ausschreiben der ersten Differenz von Z_t der Zusammenhang:

$$\Delta x_t = Y_t + Z_t - Z_{t-1} \quad . \quad (8.21)$$

Da sich die ersten Differenzen als eine lineare Kombination von Zufallsvariablen unkorrelierter stochastischer Prozesse mit einem Mittelwert von Null und endlicher Varianz darstellen lassen, und sie nur, wie sich aus der Beziehung (8.21) entnehmen läßt, für eine Zeitspanne von 1 miteinander korrelieren, hat man einen Prozeß gefunden, für den die exponentielle Ausgleichung als Prognoseverfahren optimal ist.¹⁾

8.3 Die Bestimmung des optimalen Ausgleichsparameters bei konstantem Trend mit Zufallsweg im Mittelwert

Unter Angabe der Eigenschaften dieses Prozesses ist es möglich, einen optimalen Ausgleichsparameter für die exponentielle Ausgleichung zu finden.²⁾ Zu diesen Eigenschaften des Prozesses gehört auch, daß sich die Trendkomponente aufgrund ihres Zufallswegcharakters auf die folgende Art darstellen läßt.³⁾

$$a_t = \sum_{i=0}^{\infty} Y_{t-i} \quad (8.22)$$

Allgemein kann man ein Prognosesystem, das auf einer gewogenen Ausgleichung von Zeitreihenwerten beruht und dessen Gewichtungsschema, wie das der exponentiellen Ausgleichung, aus einer unendlichen Folge von Gliedern besteht, in der Form darstellen, wie sie bereits durch (8.2)

1) Vgl. P.J. HARRISON: Exponential smoothing. Loc. cit., 827.

2) Die Ableitung des optimalen Ausgleichsparameters der exponentiellen Ausgleichung für das vorliegende Modell wurde von J.F. MUTH und P.J. HARRISON durchgeführt. Die Ausführungen dieses Abschnitts folgen den Darstellungen von J.F. MUTH. Vgl. hierzu J.F. MUTH: Optimal properties of exponentially weighted forecasts. Journal of the American Statistical Association, 55 (1960), 302-304 und P.J. HARRISON: Exponential smoothing. Loc. cit., 826 f.

3) Siehe Abschnitt 2.5 "Ein Zufallswegprozeß".

eingeführt wurde:

$$x_{t,1}^* = \sum_{j=0}^{\infty} w_j x_{t-j} \quad (8.23)$$

Die Gewichte w_j sollen nun so bestimmt werden, daß der Erwartungswert der Prognosefehlerquadrate, der durch die Beziehung

$$E(e_{t+1,1}^2) = E(x_{t+1} - x_{t,1}^*)^2 \quad (8.24)$$

mathematisch formuliert werden kann, ein Minimum ist.

Setzt man (8.17) und (8.23) für x_t bzw. $x_{t,1}^*$ in diese Funktion ein, und verwendet man auch die zuletzt angegebene Darstellung (8.22) der Trendkomponente, dann erhält man:

$$E(e_{t+1,1}^2) = E\left[\sum_{i=0}^{\infty} y_{t-i+Z_t} - \sum_{j=0}^{\infty} w_j \left(\sum_{i=j}^{\infty} y_{t-i+Z_{t-1}}\right)\right]^2 \quad (8.25)$$

Führt man die Quadrierung der Klammer durch und bildet unter Beachtung der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen untereinander die Erwartungswerte der sich ergebenden Summanden, dann läßt sich der Erwartungswert der Prognosefehlerquadrate in Abhängigkeit von den Gewichten w_j und von definierten Größen des Prozesses X_t , den Varianzen der Prozesse Y_t und Z_t , so darstellen:

$$E(e_{t+1,1}^2) = \sigma_{Y_t}^2 + \sigma_{Z_t}^2 + \sigma_{Y_t}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \sum_{i=0}^j w_i\right)^2 + \sigma_{Z_t}^2 \sum_{j=0}^{\infty} w_j^2 \quad (8.26)$$

Dieser Ausdruck erreicht dann sein Minimum, wenn die partiellen Ableitungen nach den Gewichten alle Null ergeben. Diese allgemeine Bedingung für optimale Gewichte

1) Vgl. J.F. MUTH: Loc. cit., 303.

läßt sich in der folgenden Form ausdrücken:

$$\frac{\delta e_{t+1,1}^2}{\delta w_k} = -2 \sigma_{Y_t}^2 \sum_{j=k}^{\infty} \left(1 - \sum_{i=0}^j w_i\right) + 2 \sigma_{Z_t}^2 w_k = 0 \text{ für } k=0, 1, 2 \dots \quad (8.27)$$

Um für dieses System (8.27) eine Lösung zu finden, bildet man zweckmäßigerweise die zweiten Differenzen. Dadurch läßt sich, wie in den folgenden Ausführungen gezeigt wird, die Anzahl der Summenglieder auf eine endliche Zahl reduzieren. Diese Transformation kann man dadurch beginnen, daß man (8.27) für die allgemeinen Fälle k , $k+1$ und $k-1$ formuliert:

$$2 \sigma_{Y_t}^2 \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(1 - \sum_{i=0}^j w_i\right) = 2 \sigma_{Z_t}^2 w_{k+1} \quad \text{für } k+1, \quad (8.28)$$

$$2 \sigma_{Y_t}^2 \sum_{j=k}^{\infty} \left(1 - \sum_{i=0}^j w_i\right) = 2 \sigma_{Z_t}^2 w_k \quad \text{für } k, \quad (8.29)$$

$$2 \sigma_{Y_t}^2 \sum_{j=k-1}^{\infty} \left(1 - \sum_{i=0}^j w_i\right) = 2 \sigma_{Z_t}^2 w_{k-1} \quad \text{für } k-1. \quad (8.30)$$

Subtrahiert man (8.29) von (8.28), dann fallen die Summen mit der unendlichen Anzahl von Gliedern auf der linken Seite dieser Gleichungen zum Teil fort, und man erhält

$$2 \sigma_{Y_t}^2 \left(-1 + \sum_{i=0}^k w_i\right) = 2 \sigma_{Z_t}^2 (w_{k+1} - w_k) \quad . \quad (8.31)$$

Bildet man ebenfalls die Differenz aus (8.29) und (8.30), dann ergibt sich die folgende Beziehung:

$$2 \sigma_{Y_t}^2 \left(-1 + \sum_{i=1}^{k-1} w_i\right) = 2 \sigma_{Z_t}^2 (w_k - w_{k-1}) \quad . \quad (8.32)$$

Um noch eine weitere Vereinfachung für die Lösung von (8.27), d.h. für die Bestimmung der optimalen Werte der w_i

zu erreichen, soll noch die Differenz aus den letzten beiden Gleichungen (8.31) und (8.32) gebildet werden. Dann erhält man die folgende allgemeine Darstellung der zweiten Differenzen von (8.27):

$$- 2 \sigma_{Y_t}^2 w_k = 2 \sigma_{Z_t}^2 (-w_{k+1} + 2 w_k - w_{k-1}) . \quad (8.33)$$

Dieser Ausdruck läßt sich in die Gleichung

$$- \frac{\sigma_{Y_t}^2}{\sigma_{Z_t}^2} w_k = -w_{k+1} - 2 w_k - w_{k-1} \quad (8.34)$$

überführen. Durch die Zusammenfassung der Glieder in (8.34) mit dem Faktor w_k gelangt man zu der Form:¹⁾

$$-w_{k+1} + \left(2 + \frac{\sigma_{Y_t}^2}{\sigma_{Z_t}^2}\right) w_k - w_{k-1} = 0 . \quad (8.35)$$

Diese Beziehung ist eine homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung²⁾, zu deren Lösung man üblicherweise den Ansatz

$$w_k = \lambda^k \quad (8.36)$$

wählt³⁾, wobei λ eine von Null verschiedene Konstante darstellt. Setzt man in (8.35) für w_{k+1} , w_k und w_{k-1} die aus (8.36) entsprechend abgeleiteten Ausdrücke ein, dann erhält man dadurch den folgenden Ausdruck:

$$- \lambda^2 + \left(2 + \frac{\sigma_{Y_t}^2}{\sigma_{Z_t}^2}\right) \lambda - 1 = 0 . \quad (8.37)$$

1) Vgl. J.F. MUTH: Loc. cit., 303.

2) Vgl. hierzu S. GOLDBERG: Loc. cit., S. 174.

3) Vgl. hierzu dieselbe Quelle wie 2), S. 191.

Multipliziert man (8.37) noch mit -1 , so ergibt sich die Gleichung

$$\lambda^2 - \left(2 + \frac{\sigma_{Y_t}^2}{\sigma_{Z_t}^2}\right) \lambda + 1 = 0 \quad , \quad (8.38)$$

die man als charakteristische Gleichung der Beziehung (8.35) bezeichnen kann. Diese quadratische Gleichung hat zwei Wurzeln, λ_1 und λ_2 , die sich in der folgenden Form angeben lassen:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{\sigma_{Y_t}^2}{\sigma_{Z_t}^2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(2 + \frac{\sigma_{Y_t}^2}{\sigma_{Z_t}^2}\right)^2 - 1} \quad . \quad (8.39)$$

Diese beiden Wurzeln sind zwei Lösungen der Gleichung (8.35), deren allgemeine Lösung durch

$$w_k = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k \quad (8.40)$$

gegeben ist.¹⁾ Der Frage, welche Bedeutung den beiden Konstanten c_1 und c_2 in dieser Beziehung zukommt, soll in den folgenden Ausführungen nachgegangen werden.

Zunächst kann festgestellt werden, daß die Konstante c_1 einen Wert von Null annehmen muß. Andernfalls hätten die Gleichungen (8.26) und (8.27) keine Lösungen, weil die in ihnen enthaltenen unendlichen Summen divergieren würden.²⁾ Das bedeutet, daß nur die Wurzel λ_2 als Lösung zugelassen wird, da ihr Wert kleiner als 1 ist. Für diese Größe λ_2 kann man aus (8.39) die folgende Gleichung ableiten:

1) Vgl. hierzu S. GOLDBERG: Loc. cit., S. 187.

2) Vgl. J.F. MUTH: Loc. cit., 303.

$$\lambda_2 = 1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_{Y_t}^2}{\sigma_{Z_t}^2} - \frac{\sigma_{Y_t}}{\sigma_{Z_t}} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{\sigma_{Y_t}^2}{\sigma_{Z_t}^2}} . \quad (8.41)$$

Durch den Schluß, daß nur λ_2 eine relevante Lösung darstellt, geht die allgemeine Lösung (8.40) in die Form über:

$$w_k = c_2 \lambda_2^k . \quad (8.42)$$

Aus der allgemeinen Bedingung (8.27) für optimale Ausgleichsparameter läßt sich eine wichtige Beziehung für die Bestimmung der Konstanten c_2 ableiten, wenn man diese Beziehung für $k = 0$ und $k = 1$ entwickelt. Man erhält dann

$$2 \sigma_{Y_t}^2 \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \sum_{i=0}^j w_i) = 2 \sigma_{Z_t}^2 w_0 \quad \text{für } k = 0, \quad (8.43)$$

$$2 \sigma_{Y_t}^2 \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \sum_{i=0}^j w_i) = 2 \sigma_{Z_t}^2 w_1 \quad \text{für } k = 1 . \quad (8.44)$$

Da auf der linken Seite der Beziehungen (8.43) und (8.44) die Summen bis auf w_0 übereinstimmen, ergibt sich, wenn man ihre Differenz bildet:

$$2 \sigma_{Y_t}^2 (1 - w_0) = 2 \sigma_{Z_t}^2 (w_0 - w_1) . \quad (8.45)$$

Aus diesem Ausdruck läßt sich die Gleichung

$$\frac{\sigma_{Y_t}^2}{\sigma_{Z_t}^2} (1 - w_0) = w_0 - w_1 \quad (8.46)$$

gewinnen, die sich in die Form

$$\left(1 + \frac{\sigma_{Y_t}^2}{\sigma_{Z_t}^2}\right) w_0 = \frac{\sigma_{Y_t}^2}{\sigma_{Z_t}^2} + w_1 \quad (8.47)$$

überführen läßt.¹⁾

Aus der allgemeinen Lösung (8.40) lassen sich für $k = 0$ und $k = 1$ die beiden folgenden Beziehungen für w_0 und w_1 bilden:

$$w_0 = c_2 \lambda_2^0 = c_2, \quad (8.48)$$

$$w_1 = c_2 \lambda_2. \quad (8.49)$$

Setzt man die gewonnenen Ausdrücke für w_0 und w_1 in (8.47) ein, dann ergibt sich daraus unter Zuhilfenahme der folgenden Umformung der Gleichung (8.38)

$$\frac{(1 - \lambda_2)^2}{\lambda_2} = \frac{\sigma_{Y_t}^2}{\sigma_{Z_t}^2} \quad (8.50)$$

die Beziehung

$$\frac{(1 - \lambda_2)^2}{\lambda_2} + c_2 \lambda_2 = c_2 \left(1 + \frac{(1 - \lambda_2)^2}{\lambda_2}\right). \quad (8.51)$$

Daraus folgt weiter, wenn beide Seiten der Gleichung mit λ_2 multipliziert und die Glieder mit dem Faktor c_2 zusammengefaßt werden:

$$(1 - \lambda_2)^2 = c_2 (-\lambda_2^2 + \lambda_2 + 1 - 2\lambda_2 + \lambda_2^2). \quad (8.52)$$

1) Die Beziehung (3.7a) bei J.F. MUTH: Loc. cit., 303 enthält offensichtlich einen Druckfehler, da sie aus der dortigen Gleichung (3.6) durch Bildung der zweiten Differenzen unter den angegebenen Bedingungen nicht zu einer der obigen Form von (8.47) gleichen Beziehung führt, sondern einen Widerspruch ergibt.

Aus dieser Beziehung läßt sich endlich die wichtige Gleichung für die Bestimmung der Größe c_2 , nämlich

$$c_2 = 1 - \lambda_2 \quad , \quad (8.53)$$

gewinnen.

Setzt man diesen Ausdruck c_2 in die allgemeine Lösung von (8.35) ein, dann gelangt man zu dem Resultat:

$$w_k = (1 - \lambda_2) \lambda_2^k \quad . \quad (8.54)$$

Damit ist der optimale Wert für jeden einzelnen Gewichts-koeffizienten in der Prognosefunktion (8.23) in Abhängigkeit von Parametern des stochastischen Prozesses, dessen Zeitreihenwerte als Grundlage der Prognose verwendet werden, bestimmt. Bringt man noch diese allgemeine Beziehung (8.54) in die Prognosegleichung (8.23), dann erhält man folgenden Ausdruck:

$$x_{t,1}^* = (1 - \lambda_2) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_2^j x_{t-j} \quad . \quad (8.55)$$

Es sei jetzt noch einmal daran erinnert, daß die Prognosefunktion, die aus dem Grundansatz der exponentiellen Gewichtung (5.8) entwickelt wurde, die folgende Form hatte:

$$x_{t,1}^* = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \alpha)^j x_{t-j} \quad . \quad (8.56)$$

Setzt man für $\alpha = 1 - \lambda_2$ und bildet man daraus $\lambda_2 = 1 - \alpha$, dann zeigt es sich, daß der Ausgleichsparameter α nach der oben entwickelten Methode für den angegebenen Prozeß theoretisch so bestimmt werden kann, daß eine optimale Prognose durch dieses System gewährleistet ist. Welche Schlüsse aus diesem Ergebnis gezogen werden können, sollen die folgenden Ausführungen zeigen.

Aus (8.41), der Wurzel der charakteristischen Gleichung (8.38), geht hervor, daß der optimale Ausgleichsparameter λ_2 proportional zum Verhältnis der Varianz des den Zufallsweg des Trends verursachenden Prozesses Y_t und der Varianz der irregulären Komponente Z_t ist. Die Bedeutung dieses Zusammenhangs läßt sich an einigen Beispielen gut erkennen.

Im allgemeinen kann man erwarten, daß die Varianz der Zufallskomponente des Trends wesentlich geringer ist als die der irregulären Komponente, so daß das Verhältnis der beiden Größen kleiner als 1 ist.

Ist zum Beispiel das Verhältnis der beiden Varianzen

$$\frac{\sigma_{Y_t}^2}{\sigma_{Z_t}^2} = 0,5 \quad , \quad (8.57)$$

dann bedeutet das, daß die Varianz der irregulären Komponente doppelt so groß ist wie die der Zufallswegvariablen. Setzt man diesen Wert in die obige Bestimmungsgleichung (8.41) für den Ausgleichsparameter λ_2 ein, dann erhält man:

$$\lambda_2 = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{1}{2} \right)} = 0,5 \quad . \quad (8.58)$$

Da sich der α -Wert für die Prognosefunktion der exponentiellen Gewichtung aus $\alpha = 1 - \lambda_2$ ergibt, beträgt

$$\alpha = 0,5 \quad . \quad (8.59)$$

Diesem α -Wert entspricht eine den Beobachtungswerten zugeordnete Gewichtung mit schnell abnehmenden Gliedern.

Bei einem nichtstationären Prozeß mit stark variierender Trendkomponente ist diese starke Degression erwünscht, damit die Prognosen auf einer schnellen Anpassung an ein neues Trendniveau basieren.

Ein Verhältnis der Varianzen mit einem Wert in Höhe von $\frac{1}{2}$ scheint jedoch für Zeitreihen eines eingeführten Artikels einer Unternehmung nicht sehr realistisch. Vielmehr kann man einen insgesamt stabileren Verlauf der Trendkomponente erwarten, wie er sich etwa in einem Varianzenverhältnis von $\frac{1}{20}$ widerspiegeln würde. Durch dieses Größenverhältnis kommt zum Ausdruck, daß die Schwankungen der irregulären Komponente um den Trend im Prozeß eindeutig dominieren.

Für das Verhältnis

$$\frac{\sigma_{Y_t}^2}{\sigma_{Z_t}^2} = \frac{1}{20} \quad (8.60)$$

ergibt sich aufgrund der obigen Optimalitätsbedingungen für λ_2 ein Wert von

$$\lambda_2 = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{20} - \sqrt{\frac{1}{20} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{1}{20} \right)} = 0,8 \quad , \quad (8.61)$$

aus dem sich

$$\alpha = 1 - \lambda_2 = 0,2 \quad (8.62)$$

errechnen läßt. Bei diesem α -Wert ist die Degression der Gewichte in der Reihe der zur Prognose herangezogenen Beobachtungswerte bereits wesentlich schwächer als in dem ersten Beispiel.

Diese Tatsache läßt sich auch bei Betrachtung der entsprechenden Spalte der Tabelle 1 im Abschnitt 5.5 gut erkennen.

Ist $\sigma_{Y_t}^2$ wesentlich geringer als $\sigma_{Z_t}^2$, wie es sich z.B. in einem Verhältnis von

$$\frac{\sigma_{Y_t}^2}{\sigma_{Z_t}^2} = \frac{1}{90} \quad (8.63)$$

ausdrückt, dann beträgt der entsprechende optimale Ausgleichsparameter der exponentiellen Ausgleichung:

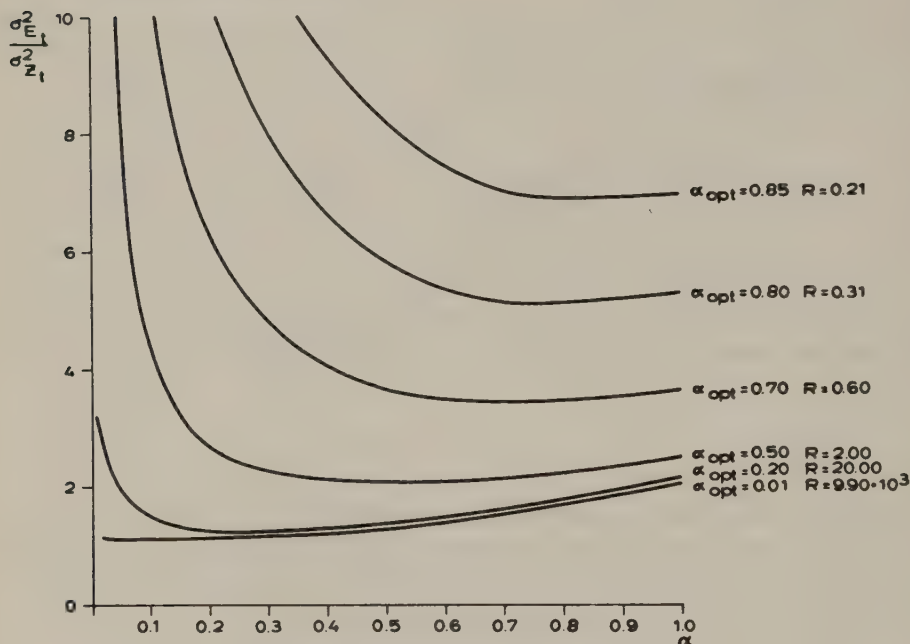
$$\alpha = 0,1 \quad . \quad (8.64)$$

Man erkennt, daß der optimale Wert des Ausgleichsparameters für einen relativ großen Bereich der Relation von $\sigma_{Y_t}^2$ zu $\sigma_{Z_t}^2$, in dem $\sigma_{Z_t}^2$ zwanzig- bis neunzigmal so groß ist wie $\sigma_{Y_t}^2$, zwischen 0,2 und 0,1 liegt.

Eine ebenso wichtige Information über den optimalen Wert des Ausgleichsparameters α bietet der Verlauf der Varianz des Prognosefehlers als Funktion des Ausgleichsparameters. Wie durch die Abbildung 3 verdeutlicht wird, ist dieser Verlauf bei allen unterschiedlichen Verhältnissen der beiden Varianzen $\sigma_{Y_t}^2$ und $\sigma_{Z_t}^2$ im Bereich des Minimums sehr flach.

Abbildung 3:

Der Zusammenhang zwischen der Höhe des Ausgleichsparameters der exponentiellen Ausgleichung und dem Verhältnis der Varianzen des Prognosefehlers und der irregulären Komponente



Quelle: P.J. HARRISON: Exponential Smoothing. Loc. cit., 829.

In dem Diagramm ist auf der Ordinaten das Maß des Verhältnisses der Varianz des Prognosefehlers zur Varianz der irregulären Komponente abgetragen, während die Abszisse die Werte des Ausgleichsparameters α trägt. Durch R , dem umgekehrten Verhältnis der Varianz der Zufallswegkomponente zur Varianz der irregulären Komponente, ist die Zuordnung der unterschiedlichen Funktionsverläufe zu den entsprechenden Prozessen gekennzeichnet. Aus der Abbildung läßt sich nun entnehmen, daß bei einem Verhältnis der Varianzen von z.B. 1 : 20 dem Minimum der entsprechenden Funktion ein optimaler Ausgleichsparameter von 0,2 zugeordnet ist. Ebenso

läßt sich bei gleichem R erkennen, daß das Verhältnis der Prognosefehlervarianz zur Varianz der irregulären Komponente erst bei einer Fehlbestimmung des optimalen Glättungsparameters, die den Wert von 0,05 unterschreitet, stark zu steigen beginnt. Weicht man nach oben hin von dem optimalen Wert von α_{ab} , dann nimmt der Quotient aus den Varianzen des Prognosefehlers und der Zufallskomponente des Prozesses nur langsam zu.

Das Bild zeigt die gleiche Entwicklung für eine Abweichung vom optimalen Parameter auch für andere Größen des Verhältnisses der Varianz der Zufallswegkomponente zur Varianz der irregulären Komponente. Aus diesem Sachverhalt läßt sich schließen, daß eine Abweichung vom optimalen Parameter der exponentiellen Gewichtung nach oben hin im allgemeinen zu einer nicht so starken Vergrößerung der Varianz des Prognosefehlers führt wie eine zu niedrige Bestimmung. Darüber hinaus läßt sich allgemein feststellen, daß die Varianz des Prognosefehlers sehr unempfindlich gegenüber einer Fehlschätzung des Ausgleichsparameters ist.¹⁾ Diese Aussagen haben insofern eine besondere Bedeutung, als die Entscheidung für die Anwendung einfacher Annäherungsverfahren zur praktischen Bestimmung des Ausgleichsparameters durch die Tatsache, daß eine Fehlbestimmung des α -Wertes nur einen geringen Einfluß auf den Prognosefehler ausübt, sehr erleichtert wird. Wie aus der vorangegangenen Ableitung bereits ersichtlich ist, ist die Schätzung eines optimalen Ausgleichsparameters nämlich mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden.

Vor allem ist die Schätzung der Varianz der Störkomponenten Z_t und die Schätzung der Varianz der Zufallsveränderung Y_t der Trendkomponente unter Verwendung von Zeitreihenwerten von nur begrenztem Umfang praktisch unmöglich.²⁾ Die Einflüsse

1) Vgl. P.J. HARRISON: Exponential smoothing. Loc.cit., 828.

2) Vgl. R.F. MEYER: An Adaptive Method for Routine Short-Term Forecasting. (Proceedings of the 3rd International Conference on Operational Research, Oslo). London: English Universities Press Ltd., 1964, S. 893.

der beiden Zufallsprozesse sind nämlich nur vermischt in den Beobachtungswerten vorhanden und haben deshalb keine eigenen, sondern nur gemeinsame Ausprägungen. Ihre Trennung ist aber erforderlich, um das Verhältnis ihrer Varianzen für die Bestimmung eines optimalen Ausgleichsparameters schätzen zu können. Hier liegt die praktische Grenze einer auf einer Schätzfunktion basierenden Bestimmung des Ausgleichsparameters der exponentiellen Ausgleichung.

Trotzdem sind jedoch die theoretischen Zusammenhänge für praktische Zwecke nicht ohne Wert. Bei der Untersuchung von Zeitreihen der Absatzwirtschaft wird man im allgemeinen zu der Auffassung kommen können, daß - wie bereits ausgeführt wurde¹⁾ - die zufällige Veränderung der Trendkomponente gegenüber Zufallsschwankungen um den Trend gering sein wird. Mit anderen Worten ausgedrückt bedeutet das, daß der Zufallswegprozeß des Trendwertes sehr langsam und auf kurze Dauer kaum sichtbar vor sich geht, während dagegen die irreguläre Komponente mit einer großen Varianz um diesen Trend schwankt. Wie gezeigt, liegt der optimale Ausgleichsparameter im Bereich von 0,2 bis 0,1, wenn der Wert der Varianz der Zufallskomponente zwanzig- bis neunzigmal größer ist als der der Varianz der Zufallswegkomponente. Dieses ist der Wertbereich, an dem man sich in der Praxis bei der Festsetzung des Ausgleichsparameters orientieren sollte.²⁾

1) Siehe Abschnitt 3.4 "Ein Zufallswegmodell für Güter mit konstantem Absatzverlauf".

2) Vgl. P.J. HARRISON: Exponential smoothing. Loc. cit., 828, ebenso R.M. KIRBY: A comparison of short and medium range statistical forecasting methods. Management Science, Series B, 13 (1966), 208 und R.G. BROWN: Statistical Forecasting. Loc. cit., S. 54.

8.4 Bestimmung des Ausgleichsparameters der exponentiellen Ausgleichung durch Simulation

Aufgrund der Schwierigkeit, das Varianzenverhältnis der den Prozeß bestimmenden Zufallsvariablen nicht ermitteln zu können, liegt es im konkreten Fall nahe, einen guten Wert des Ausgleichsparameters für eine bestimmte Zeitreihe durch Simulation zu ermitteln. Eine derartige Näherungslösung für einen optimalen α -Wert läßt sich sehr schnell mit Hilfe einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage durchführen, indem man Schätzwerte für die Varianz des Prognosefehlers für unterschiedliche Werte des Ausgleichsparameters berechnet und denjenigen Ausgleichsparameter wählt, der dem kleinsten Wert dieser Varianz entspricht. Man kann erwarten, daß durch die Simulation ein α -Wert bestimmt wird, der praktischen Zwecken in der Qualität seiner Annäherung an einen durch ein Schätzverfahren gewonnenen optimalen Wert genügt, weil das Verfahren der exponentiellen Ausgleichung die durch eine solche Approximation möglicherweise entstehenden Ungenauigkeiten mit seiner Eigenschaft der Unempfindlichkeit gegenüber Fehlschätzungen des optimalen Parameters mildert.

Da es sich zeigen läßt, daß die Kovarianzen der Prognosefehler für alle Zeitabstände bei optimalem Ausgleichsparameter Null sind,¹⁾ läßt sich auch die Schätzung der Kovarianzfunktion der Prognosefehler als Kontrolle der Simulation verwenden. Da die Kovarianzen nur für diesen Fall Null sind, zeigt sich eine gute Annäherung an den optimalen α -Wert dadurch an, daß die Schätzwerte der Kovarianz sich dem Wert Null nähern.

1) Vgl. R.F. MEYER: Loc. cit. S. 894. Siehe auch Abschnitt 8.1 "Allgemeine Eigenschaften von stochastischen Prozessen, für die die exponentielle Ausgleichung optimale Prognosen ergibt."

9. Eigenschaften von Prognosen auf der Grundlage der doppelten exponentiellen Ausgleichung bei absolut linearem Trend

9.1 Annahmen über die Struktur der Zeitreihe bei doppelter exponentieller Ausgleichung und damit verwandter Verfahren

Um die Eigenschaften der aus der exponentiellen Ausgleichung entwickelten oder im Prinzip mit ihr verwandten Verfahren und auch die Unterschiede zwischen diesen Verfahren, die der Bestimmung eines linearen Trends dienen sollen, beschreiben zu können, wird ihre Untersuchung nach den verschiedenen Grundannahmen dieser Modelle über die Struktur der Zeitreihen, für die Prognosen erstellt werden sollen, untergliedert.

Allen gemeinsam ist die Annahme, daß der Zeitreihe ganz allgemein ein linearer Trend zugrunde liegt. Das bedeutet, daß sich die Zeitreihe zumindest lokal durch ein Modell der Form

$$x_t = a_t + b_t t \quad (9.1)$$

gut annähern läßt. Als weitere gemeinsame Annahme kommt hinzu, daß dieser Trend von einer irregulären Komponente überlagert wird, die einen Mittelwert von Null und eine endliche Varianz hat. Außerdem wird üblicherweise vorausgesetzt, daß sie einen Gauss-Prozeß bildet, dessen Zufallsvariablen unkorreliert sind. ¹⁾

¹⁾ Vgl. R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 59.

In diesen Annahmen, die den Zeitreihentyp allgemein beschreiben, liegt die Gemeinsamkeit der in diesem Kapitel untersuchten Prognosemethoden, die auf dem Prinzip der exponentiellen Ausgleichung aufbauen. Es werden deshalb nachfolgend zusätzliche Eigenschaften der den verschiedenen Verfahren zugrundeliegenden Zeitreihenmodelle angegeben, die als Unterscheidungskriterien dienen sollen.

Zunächst folgt die Untersuchung der Weiterentwicklung der exponentiellen Ausgleichung zur sogenannten doppelten exponentiellen Ausgleichung unter der Annahme, daß ein linearer Trend vorliegt, der bis zur Gegenwart immer in seiner Lage und Steigung konstant geblieben ist. In Begriffen der Theorie stochastischer Prozesse ausgedrückt bedeutet diese Annahme, daß der Mittelwert des die Zeitreihe erzeugenden nichtstationären Prozesses exakt durch ein Polynom der Zeit vom Grade 1 beschrieben werden kann.

Im zweiten Zeitreihenmodell sind dann Brüche in der Struktur des Prozesses vorgesehen, die jedoch in ihrem Ausmaß und dem Zeitpunkt ihres Eintretens nicht genau bestimmt sind. Zum Schluß der Untersuchung wird in der Spezifizierung des Verhaltens des der Zeitreihe zugrundeliegenden Prozesses über das zweite Modell insofern noch hinausgegangen, als die Strukturveränderungen des Prozesses in ihrer Art und dem möglichen Ausmaß durch Parameter näher gekennzeichnet werden.

Durch die Gliederung der Untersuchung nach diesen Gesichtspunkten läßt sich erreichen, daß die für die Schlußfolgerungen aus der Analyse wichtigen Voraussetzungen über die Struktur der Zeitreihen genau geklärt werden. Bei der Ableitung der Verfahren, die auf dem Prinzip der exponentiellen Ausgleichung aufbauen, und der Betrachtung ihrer Eigenschaften

wird nämlich meistens nur allgemein von einem linearen Trend gesprochen, implizit jedoch eines der drei Modelle vorausgesetzt. Zuerst soll nun im folgenden Abschnitt das Zeitreihenmodell beschrieben werden, das der Ableitung der doppelten exponentiellen Ausgleichung zugrunde liegt.¹⁾

9.2 Das Zeitreihenmodell eines absolut linearen Trends

Die Entwicklung eines Prognosesystems, das auf der exponentiellen Ausgleichung aufbaut, läßt sich unter den folgenden Bedingungen zeigen. Es sei angenommen, daß im Zeitpunkt t der Mittelwert eines Prozesses durch ein Polynom ersten Grades in Abhängigkeit von der Zeit für ein Zeitintervall von $-\infty$ bis t dargestellt werden kann. Darüberhinaus soll dieser Trend sein Verhalten bis zum Zeitpunkt $t+h$ nicht ändern. Dieses Zeitreihenmodell soll hier als ein absolut linearer Trend bezeichnet werden.

Aus den Angaben, die allgemein durch die Begriffe der Zeitreihenzerlegung insbesondere über die Zufallskomponente einer Zeitreihe gemacht werden, kann man schließen, daß die Zufallsvariablen dieses Prozesses unkorreliert sind.

Für einen Prozeß, dessen Autokorrelationsfunktion für alle Zeitabstände größer als Null den Wert Null annimmt, bildet eine Schätzfunktion für den Mittelwert des Prozesses die geeignete Grundlage für eine Prognosemethode. Aus einer solchen Schätzfunktion, die begründet durch die Annahme eines linearen Trends aus Schätzfunktionen der Koeffizienten eines linearen Polynoms bestehen würde, lassen sich durch Einsetzen zukünftiger Zeitpunkte Prognosen für die Zukunft berechnen.

1) Siehe z.B. R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 128, ebenso W. WETZEL: Univariable mikro-ökonomische Prognosemodelle. Loc.cit., 164.

Die Grundgedanken einer auf diesem Prinzip aufbauenden Prognosemethode sollen im folgenden Abschnitt aufgezeigt werden, indem die Ableitung der doppelten exponentiellen Ausgleichung dargestellt wird. Dabei soll versucht werden, Kriterien für die Beurteilung dieses Verfahrens in bezug auf die Eignung zur Prognoseerstellung für Zeitreihen mit linearem Trend zu gewinnen.

9.3 Die Prognosemethode auf der Grundlage der doppelten exponentiellen Ausgleichung von Zeitreihen mit absolut linearem Trend

Die Anwendung der exponentiellen Ausgleichung führt in der Form, wie sie zur Prognoseerstellung bei konstantem Trend¹⁾ verwendet wurde, bei Zeitreihen mit einem absolut linearen Trend zu systematisch verzerrten Schätzungen des Mittelwertes des der Zeitreihe zugrundeliegenden Prozesses.²⁾ Lassen sich also die Zeitreihenwerte exakt durch ein Polynom von der Form (9.1) beschreiben, dann erreicht die systematische Verzerrung im Grenzfall einer unendlichen Anzahl von Zeitreihenwerten einen endlichen konstanten Wert in der Höhe von³⁾

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot b. \quad (9.2)$$

Werden dauernd aus den Zeitreihenwerten durch einfache exponentielle Ausgleichung Schätzwerte für den Mittelwert des Prozesses berechnet, und wird dabei die systematische Verzerrung (9.2) erreicht, dann lassen sich die

1) Siehe Abschnitt 5.5 "Ableitung des Grundprinzips der exponentiellen Ausgleichung".

2) Vgl. W. WETZEL: Univariable mikro-ökonomische Prognosemodelle. Loc. cit., 163.

3) Vgl. R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 128.

dadurch gewonnenen Größen $S_t(x)$ ¹⁾ durch das folgende Modell beschreiben:

$$S_t(x) = a - \frac{1 - \alpha}{\alpha} b + b t \quad . \quad (9.3)$$

Diese Beziehung stellt die Zeitreihe der $S_t(x)$ -Werte in Abhängigkeit der Koeffizienten des Ursprungsprozesses der Zeitreihenwerte dar. Da der mittlere Ausdruck der rechten Seite der Gleichung (9.3) bei konstantem b und α eine Konstante ist, läßt sich erkennen, daß die Zeitreihe der Ausgleichswerte parallel zur ursprünglichen Reihe verläuft. Ob diese Verschiebung um einen festen Betrag gegenüber dem Ursprungsprozeß nach "unten" oder nach "oben" erfolgt, hängt davon ab, ob der Trend eine positive oder negative Steigung aufweist.

Aus der Feststellung, daß die einfache exponentielle Ausgleichung bei einem linearen Trend eine konstante systematische Verzerrung hervorruft, läßt sich folgern, daß die exponentielle Ausgleichung einer nach diesem Prinzip gewonnenen Zeitreihe eine systematische Verzerrung bedingt, die dem Betrage nach genau so hoch ist wie die der vorangegangenen exponentiellen Glättung gegenüber der Ursprungszeitreihe, wenn der Ausgleichsparameter bei beiden Ausgleichungen gleich groß ist. ²⁾

Aus diesem Grund läßt sich durch eine lineare Kombination der durch die exponentielle Ausgleichung gefundenen

1) Die bisherige Schreibweise für die durch exponentielle Ausgleichung gewonnenen Größen wird aufgegeben. Dafür wird die obige Symbolik eingeführt. Der Buchstabe S steht in den folgenden Ausführungen für die Rechenoperation der exponentiellen Ausgleichung. Der in Klammern gesetzte Buchstabe bezeichnet die auszugleichende Zeitreihe.

2) Vgl. R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 130.

Werte eine asymptotisch unverzerrte Schätzung für die Trendkomponente konstruieren. Schreibt man die Ausgleichung der Ausgleichswerte in der Form

$$S_t^{(2)}(x) = \alpha S_t(x) + (1 - \alpha) S_{t-1}^{(2)}(x) , \quad (9.4)$$

dann ist mit $S_t^{(2)}(x)$ die doppelte exponentielle Ausgleichung der Ursprungszeitreihe x_t ($t = 1, 2, \dots, n$) bezeichnet¹⁾, während durch $S_t(x)$ die durch einfache exponentielle Ausgleichung gewonnenen Werte dargestellt sind. Wenn $S_t^{(2)}(x)$ zu jedem Zeitpunkt um denselben Betrag gegenüber $S_t(x)$ verschoben ist wie $S_t(x)$ gegenüber x_t , dann läßt sich eine lineare Kombination der einfachen und doppelten Ausgleichung zur Bildung eines unverzerrten Schätzwertes des Trends (9.1) zum Zeitpunkt t durch die folgende Beziehung angeben:²⁾

$$\hat{x}_t = S_t(x) + [S_t(x) - S_t^{(2)}(x)] \quad (9.5)$$

$$= 2 S_t(x) - S_t^{(2)}(x) . \quad (9.6)$$

Da die systematische Verzerrung durch die Anwendung der einfachen exponentiellen Ausgleichung im Grenzfall in der durch (9.2) angegebenen Höhe entsteht und diese Verzerrung derjenigen der zweifachen exponentiellen Ausgleichung gegenüber der einfachen Ausgleichung gleich ist, erhält man aus

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha} b = S_t(x) - S_t^{(2)}(x) \quad (9.7)$$

einen Schätzwert für b_t durch die Umformung dieser Be-

1) Vgl. R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 128.

2) Vgl. R.G. BROWN und R.F. MEYER: Loc. cit., 678.

ziehung:¹⁾

$$\hat{b}_t = \frac{\alpha}{1 - \alpha} [s_t(x) - s_t^{(2)}(x)] \quad . \quad (9.8)$$

Damit ist die Steigung der Schätzfunktion zum Zeitpunkt t und einer ihrer Punkte, nämlich $\hat{x}_t$, bestimmt. Unter der Annahme, daß die Entwicklung des Prozesses sich unverändert mindestens noch h Perioden in die Zukunft hinein bis zum Zeitpunkt $t+h$ fortsetzt, erhält man eine Prognose für diesen Zeitpunkt aus der Beziehung

$$x_{t,h}^* = \hat{x}_t + \hat{b}_t h \quad . \quad (9.9)$$

Aus der Art der Ableitung dieses Prognosesystems, das auf Rechenoperationen der exponentiellen Ausgleichung beruht, können allein die Berechtigung und die Vorteile seiner Verwendung für praktische Zwecke nicht entnommen werden. Außer der Unverzerrtheit der Prognosen bei dem vorliegenden Modell werden sonst keine allgemeinen Eigenschaften des Verfahrens gezeigt. Es müssen deshalb noch andere Merkmale der aus mehreren Stufen der exponentiellen Ausgleichung zusammengesetzten Prognoseverfahren untersucht werden.

9.4 Die Gewichtung der Zeitreihenwerte bei doppelter exponentieller Ausgleichung

Die Rechenoperation der exponentiellen Ausgleichung nach dem Grundprinzip

$$s_t(x) = \alpha x_t + (1 - \alpha) s_{t-1}(x), \quad (9.10)$$

1) Vgl. R.G. BROWN und R.F. MEYER: Loc. cit., 678.

Dieser Formalismus der mehrfachen exponentiellen Ausgleichung von Zeitreihen, der allein betrachtet wenig Aussagekraft über die auf seiner Grundlage aufbauenden Prognosen besitzt, wurde hier dargestellt, um in seinem Zusammenhang die aus ihm folgende Gewichtung der Zeitreihenwerte darzustellen. Die n-fache exponentielle Ausgleichung einer Zeitreihe (9.15) läßt sich auch durch die folgende Beziehung ausdrücken:¹⁾

$$S_t^n(x) = \alpha^n \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j-1} (1 - \alpha)^j x_{t-j} \quad (9.16)$$

Es läßt sich nachweisen, daß die Summe der Gewichte eins ergibt, so daß also der Zusammenhang besteht:

$$\alpha^n \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j-1} (1 - \alpha)^j = 1 \quad (9.17)$$

Aus dieser Eigenschaft einer n-fachen exponentiellen Ausgleichung wie auch aus der Betrachtung des Verlaufs der Folge ihrer Gewichte lassen sich noch keine Schlüsse über die exponentielle Ausgleichung, wie sie durch die Anwendung der Prognosefunktion (9.9) unter Berücksichtigung von (9.6) und (9.8) bewirkt wird, in bezug auf die Gewinnung von Prognosen bei linearem Trend ziehen, da die Schätzfunktion aus Werten der ein- und zweifachen exponentiellen Ausgleichung zusammengesetzt ist.

Es läßt sich jedoch aus der Schätzfunktion der Ausgleichung (9.9) die Form der Gewichte, wie sie den Zeitreihenwerten bei einer Prognose für eine Periode in die Zukunft zugeordnet würden, durch die Beziehung²⁾

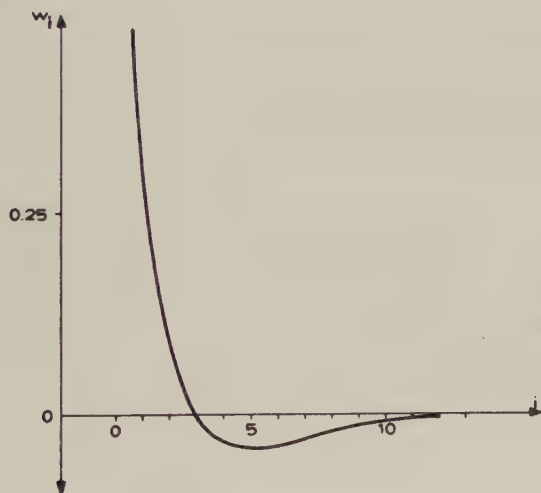
$$w_1 = \alpha (1 - \alpha)^1 \left(2 - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \quad (9.18)$$

1) Vgl. W. WETZEL: Univariable mikro-ökonomische Prognosemodelle. Loc. cit., 178.

2) Vgl. dieselbe Quelle wie 1), 169.

angeben, in der mit w_i das dem $t-i$ -ten Zeitreihenwert zugeordnete Gewicht bezeichnet wird. Eine Folge von Gewichten ist in der Abbildung 4, in der die Glieder der Gewichtsfolge durch einen stetigen Kurvenzug verbunden sind, für einen α -Wert von 0,4 dargestellt.

Abbildung 4: Zusammenhang zwischen w_i und i



Quelle W. WETZEL: Univariable mikro-ökonomische Prognosemodelle. Loc. cit., 169.

Aus dem Verlauf der Gewichtsfolge läßt sich zwar eine Ähnlichkeit mit dem Verlauf der Gewichtsfolge der einfachen exponentiellen Ausgleichung von Zeitreihenwerten entnehmen, jedoch liegt die Ähnlichkeit nur in der allgemeinen Degression der Folge bis zu einem bestimmten Punkt, der bei dem in der Abbildung dargestellten Fall schon bei einem niedrigen Wert von i erreicht wird. Eine intuitive Begründung der Ausgleichung und der darauf aufbauenden Prognose mit Hilfe einer linearen Kombination der unterschiedlichen Grade der exponentiellen Ausgleichung läßt sich aus dem Verlauf der

Gewichtsfolge, wie sie sich für die einfache exponentielle Ausgleichung angeben läßt¹⁾, kaum entnehmen. Es läßt sich deshalb fragen, ob für dieses Verfahren eine andere, theoretische Rechtfertigung gefunden werden kann.

9.5 Die allgemeine Ableitung von Gewichten für die Ausgleichung von Zeitreihen mit absolut linearem Trend

Um dieser Frage nachzugehen, soll in diesem Abschnitt überprüft werden, ob man von einem allgemeinen Ansatz der Gewichtung einer Zeitreihe mit einem linearen Trend und einer endlichen Anzahl von Beobachtungswerten ausgehend zum Gewichtungsschema der doppelten exponentiellen Ausgleichung gelangen kann.

Auch hier soll wieder von einem Zeitreihenmodell mit einem streng linearen Trend, d.h. einem Trendverhalten, wie es durch ein Polynom erster Ordnung dargestellt werden kann, ausgegangen werden, das durch einen Zufallsprozeß Z_t überlagert wird. Dieses Modell läßt sich in der folgenden Form darstellen:

$$X_t = a + b t + Z_t \quad . \quad (9.19)$$

Es soll hier noch einmal erwähnt werden, daß dieses Zeitreihenmodell bei der Aufstellung von bestimmten Prognoseverfahren, die auf der linearen Kombination verschiedener Grade der exponentiellen Ausgleichung beruhen, und der Untersuchung ihrer Eigenschaften zugrundegelegt wird.²⁾ Besteht der Prozeß Z_t aus unkorrelierten Zufallsvariablen

1) Siehe hierzu Abschnitt 5.4 "Ausgleichung von Zeitreihen durch geometrisch gewogene gleitende Durchschnitte".

2) Vgl. R.G. BROWN und R.F. MEYER: Loc. cit., 677, ebenso W. WETZEL: Univariable mikro-ökonomische Prognosemodelle. Loc. cit., 163 und 177.

mit einem Mittelwert von Null und endlicher Varianz, und fordert man, daß beim Vorliegen einer Zeitreihe mit einer Anzahl von n Zeitreihenwerten eine Prognose im Zeitpunkt t für einen zukünftigen Zeitpunkt $t+h$ durchgeführt werden soll, die auf einer linearen Kombination der Zeitreihenwerte beruhen soll, so kann man einen allgemeinen Ansatz des Problems wie folgt formulieren:¹⁾

$$x_{t,h}^* = \sum_{i=0}^{n-1} w_i x_{t-i} \quad (9.20)$$

Wie groß sind aber die Gewichte, die diese Funktion zu der besten linearen Prognosefunktion machen? Wählt man zur Bestimmung der optimalen Gewichte das Kriterium der minimalen Varianz der Prognose, betrachtet man also die Schätzfunktion, aus der durch Extrapolation Prognosen für h Perioden in die Zukunft gewonnen werden sollen, als optimal, die bei einem Gewichtungsschema der obigen Form (9.20) die geringste Varianz der Schätzung für zukünftige Zeitpunkte aufweist, dann läßt sich als Ausgangspunkt der Bestimmung dieser optimalen Gewichte die folgende Funktion angeben:²⁾

$$E\{[x_{t,h}^* - E(x_{t,h}^*)]^2\} = \sigma_{Z_t}^2 \sum_{i=0}^{n-1} w_i^2 \quad (9.21)$$

Die Gewichte, für die diese Funktion ein Minimum hat, haben eine Form wie sie der Methode der kleinsten Quadrate entspricht.³⁾ Bedient man sich also zur Schätzung der Koeffizienten der Prognosefunktion der Methode der kleinsten

1) Vgl. J. JOHNSTON: Loc. cit., S. 35.

2) Den Nachweis der Gültigkeit dieser Beziehung unter den angegebenen Bedingungen sowie die Ableitung der optimalen Gewichte führt J. JOHNSTON: Loc. cit., S. 35 f.

3) Dieselbe Quelle wie 1), S. 36.

Quadrate, dann läßt sich daraus eine Gewichtung der Zeitreihe ableiten, die die Varianz der Prognose minimiert und deshalb im Vergleich zu anderen Verfahren die besten unverzerrten Prognosen ergibt.

Das Ergebnis der Ableitung von optimalen Gewichten unter dem Gesichtspunkt der minimalen Varianz der Prognose beweist, daß man auch unter diesem theoretischen Aspekt nicht zu einer Gewichtung gelangt, wie sie durch die lineare Kombination der einfachen und doppelten exponentiellen Ausgleichung zur Durchführung von Prognosen bei Zeitreihen mit linearem Trend in der Form von (9.16) vorgenommen wird.

9.6 Die Methode der exponentiell gewogenen kleinsten Quadrate als Kriterium der Koeffizientenschätzungen durch lineare Kombination der einfachen und doppelten exponentiellen Ausgleichung bei absolut linearem Trend

Stellt es sich auch im vorherigen Abschnitt heraus, daß zur Prognostizierung von Zeitreihenprozessen mit absolut linearem Trend die Suche nach optimalen Gewichten für die Zeitreihenwerte zur Methode der kleinsten Quadrate und nicht zur exponentiellen Ausgleichung führt, so läßt sich doch noch aufgrund dieser Untersuchung eine Parallele zwischen beiden Verfahren ziehen. Es läßt sich nämlich eine aufschlußreiche Beziehung zwischen den Koeffizientenschätzungen einer linearen Trendfunktion, die aus linearen Kombinationen von exponentiellen Ausgleichungen verschiedener Grade gewonnen werden, und den Quadraten der Residuen herstellen, die sich für die Zeitreihenwerte in bezug auf die Schätz- und Prognosefunktion ergeben. Diese Beziehung soll hier kurz beschrieben werden.

Kann der Trend eines Prozesses durch ein Polynom erster Ordnung dargestellt werden, und werden die Koeffizienten des Polynoms durch lineare Kombination der einfachen und doppelten exponentiellen Ausgleichung in Form von (9.6) und (9.8) gewonnen, dann wird durch dieses Polynom die Bedingung erfüllt, daß der folgende Ausdruck seinen minimalen Wert annimmt:¹⁾

$$\alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \alpha)^i [x_{t-i} - a_t - b_t (t - i)]^2 \quad (9.22)$$

Ohne Rücksicht auf die Höhe des Ausgleichsparameters α sind die Größen a_t und b_t , wenn sie diese Bedingung erfüllen, so bestimmt, daß die Summe der durch eine geometrisch degressive Gewichtsfolge gewogenen Abstandsquadrate der Zeitreihenwerte von der Schätzfunktion ein Minimum ist. Aufgrund dieses Sachverhalts kann man die auf diese Art gewonnenen Schätzungen als Schätzungen nach der "Methode der exponentiell gewichteten kleinsten Quadrate"²⁾ bezeichnen.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß unter derselben bzw. sinngemäß der gleichen Bezeichnung ein Verfahren der Ausgleichung von Zeitreihenwerten existiert³⁾, das sich nur gering im Optimalitätskriterium seiner Schätzfunktionen von dem obigen Verfahren mit dem Optimalitätskriterium (9.22) unterscheidet. Für ein beliebiges Polynom P_t vom Grade n , dessen Koeffizienten geschätzt werden sollen, verlangt dieses Verfahren als Kriterium optimaler Koeffizientenschätzungen:⁴⁾

-
- 1) Der Beweis dieser Behauptung wurde von D'ESOPPO für den allgemeinen Fall eines Trends, der sich durch ein Polynom von der Ordnung n darstellen läßt, erbracht. Vgl. D.A. D'ESOPPO: A note on forecasting by the exponential smoothing operator. Operations Research, 9 (1961), 686 f.
 - 2) H. PRILLWITZ: Loc. cit., S. 10.
 - 3) Siehe z.B. G. MATT: Bestimmung statistisch gesicherter Koeffizienten bei der exponentiellen Ausgleichung. Unternehmensforschung, Band 10, 1 (1966), 15-31 und R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 158 - 198 und S. 227 - 241.
 - 4) Vgl. R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 162.

$$\sum_{i=0}^t (1 - \alpha)^i (x_{t-i} - p_{t-i})^2 = \text{Min!} \quad (9.23)$$

Die Unterschiede der beiden Bedingungen (9.22) und (9.23) liegen darin, daß durch das Kriterium (9.23) nur eine endliche Anzahl von Zeitreihenwerten in die Rechnung eingeht, und die Gewichtsfolge dem Quadrat des Residuums zum Zeitpunkt Null ein Gewicht von eins zuordnet, während bei Gültigkeit der Bedingung (9.22) dieses Gewicht den Wert α hat, der kleiner als eins ist, und unendlich viele Zeitreihenwerte in die Rechnung einbezogen werden. Zur Vervollständigung des Vergleichs der Kriterien kann man noch anführen, daß man durch sie nicht zu den gleichen Koeffizientenschätzungen von Polynomen kommen kann.¹⁾

Nach dieser Abgrenzung der beiden Bedingungen, die häufig trotz der Unterschiede dieselbe Bezeichnung tragen, soll auf eine bestimmte Eigenschaft des Verfahrens mit dem Kriterium (9.22) eingegangen werden. Das Optimalitätskriterium (9.22) der exponentiellen Ausgleichung besagt, daß die Bestimmung der Koeffizienten eines linearen Trends von der Gewichtung der Residuen abhängt. Eine solche exponentielle Gewichtung der Quadrate der Residuen bewirkt, daß die Lage und die Steigung der Schätzung des Prozeßverlaufs wesentlich stärker durch die jüngeren als durch die älteren Zeitreihenwerte bestimmt werden.

Hier begegnet man wieder dem schon einmal im Zusammenhang mit der exponentiellen Ausgleichung angeführten intuitiven Gesichtspunkt der Konstruktion einer Prognosefunktion.²⁾

Unter diesem Aspekt baut die Zukunftsschätzung wesentlich stärker auf jüngeren als auf älteren Vergangenheitswerten auf. Diese Wirkung wird dadurch erreicht, daß den Beobachtungswerten von der Vergangenheit in die Gegenwart hinein geometrisch zunehmende Gewichte zugeordnet werden.

1) Siehe hierzu R.G.BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 162.

2) Siehe Abschnitt 5.4 "Ausgleichung von Zeitreihen durch geometrisch gewogene gleitende Durchschnitte".

Reicht aber die plausible Erklärung der Koeffizientenschätzung nach dem Prinzip der exponentiell gewogenen kleinsten Quadrate aus, um sie anderen Verfahren, z.B. der Methode der kleinsten Quadrate oder den aus ihr entwickelten Verfahren gleitender Durchschnitte, für lineare Trendmodelle¹⁾ vorzuziehen?

Die Prüfung der theoretischen Zusammenhänge hat ergeben, daß diese Frage nur mit einem Nein beantwortet werden kann. Bei der Zugrundelegung eines absolut linearen Trends für den realistischen Fall endlich vieler Beobachtungswerte muß nämlich eine plausible Begründung für die Art der Koeffizientenschätzung klar hinter die Methode der kleinsten Quadrate zurücktreten, da diese die besten unverzerrten Schätzungen der Koeffizienten ergibt.²⁾ Die Methode der exponentiellen Ausgleichung kann also für Zeitreihen eines absolut linearen Trends, auf dessen Grundlage die Methode abgeleitet wurde, und dessen absolute Konstanz immer durch die Einbeziehung unendlich vieler Zeitreihenwerte implizit vorausgesetzt wird, höchstens "zweitbeste" Schätzungen der Koeffizienten einer als Prognosefunktion dienenden Schätzfunktion ergeben.

Es läßt sich noch eine weitere Frage, die sich ebenfalls bei der Betrachtung des Optimalitätskriteriums (9.22) stellt, anschließen. Welche Rolle spielt der Wert des Ausgleichsparameters für die Prognosen, die auf Koeffizientenschätzungen dieser Methode beruhen?

Diese Frage läßt sich durch die folgende Feststellung relativ leicht beantworten. Die Minimumeigenschaft der nach der Methode der exponentiellen Ausgleichung gewonnenen Koeffizientenschätzungen wurde für den Fall eines fest vorgegebenen

1) Siehe dazu M.G. KENDALL und A. STUART: Loc.cit., S. 366.

2) Siehe Abschnitt 9.5 "Die allgemeine Ableitung von Gewichten für die Ausgleichung von Zeitreihen mit absolut konstantem Trend."

Ausgleichsparameters angegeben. Daraus kann man schließen, daß die Methode der exponentiell gewogenen kleinsten Quadrate für jeden Wert des Ausgleichsparameters optimale Prognosen im Sinne der minimalen Quadratsumme der geometrisch gewogenen Residuen ergibt.

9.7. Die Bestimmung des optimalen Ausgleichsparameters bei absolut linearem Trend

Eine Methode zur theoretischen Bestimmung eines optimalen Ausgleichsparameters, der in der Prognoseerstellung bei linearen Trendmodellen und auch bei Trendmodellen höherer Ordnung ¹⁾ benutzt wird, ist dem Verfasser nicht bekannt. Es läßt sich jedoch vermuten, daß unter den gegebenen Voraussetzungen eines absolut linearen Trends eine theoretische Ausgleichsparameterbestimmung zu dem gleichen Ergebnis führen würde wie die bei einer einfachen exponentiellen Ausgleichung eines absolut konstanten Trends. Aus dem Resultat würde sich ergeben, daß der Ausgleichsparameter für optimale Prognosen den Wert Null annähme, und deshalb der Prognoseanfangswert immer weiter extrapoliert werden würde.²⁾ Empfehlungen für die praktische Festsetzung des Ausgleichsparameters lassen sich erst machen, wenn man von dieser strengen Fassung eines linearen Trendmodells abgeht und sich einem realistischeren Modell zuwendet, in dem - wie im folgenden Abschnitt - Veränderungen der Koeffizienten der Prognosefunktion im Laufe der Zeit vorgesehen sind.

1) Vgl. R.G. BROWN und R.F. MEYER: Loc. cit., 673-685, R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 132-144 und W. WETZEL: Univariable mikro-ökonomische Prognosemodelle. Loc. cit., 172-186.

2) Ähnlich auch R.G. BROWN und R.F. MEYER: Loc. cit., 679.

10. Eigenschaften von Prognosen auf der Grundlage der doppelten exponentiellen Ausgleichung bei lokal linearem Trend

10.1 Das Zeitreihenmodell eines lokal linearen Trends

Das Modell, unter dessen Annahmen sich weitere Eigenschaften der exponentiellen Ausgleichung bei Zeitreihen mit einem linearen Trend angeben lassen, sieht vor, daß ein Polynom erster Ordnung nur lokal, also nur für eine begrenzte Anzahl von Zeitreihenwerten, eine gute Annäherung des Prozeßverlaufs bietet, während außerhalb dieser Begrenzung der Trend zwar auch linear verläuft, jedoch gegenüber dem jeweils betrachteten Bereich von Zeitreihenwerten durch einen Strukturbruch verschoben oder in seiner Steigung verändert ist. Eine genaue Bestimmung dieser Strukturbrüche wird dabei aber nicht vorgenommen.

10.2 Prüfung der Erwartungstreue der doppelten exponentiellen Ausgleichung bei lokal linearem Trend

Es ist nun möglich, für das im vorherigen Abschnitt angegebene Modell nachzuweisen, daß die mit Hilfe der exponentiellen Ausgleichung gewonnenen Schätzungen der Koeffizienten linearer Trendmodelle asymptotisch unverzerrt sind.¹⁾ Das Verfahren gleitet nämlich bei fortlaufender Prognostizierung über die Strukturbrüche hinweg und diskontiert

1) Den Nachweis dieser Eigenschaft der exponentiellen Ausgleichung für den allgemeinen Fall eines Trendmodells mit n Koeffizienten hat W. WETZEL erbracht. Vgl. hierzu W. WETZEL: Univariable mikro-ökonomische Prognosemodelle. Loc. cit., 184 ff, ebenso H. PRILLWITZ: Loc. cit., S. 20-24.

diese von Periode zu Periode immer mehr, bis sie schließlich theoretisch nach einem unendlich langen Zeitintervall nicht mehr ins Gewicht fallen.

10.3 Empfehlungen für die praktische Bestimmung des Ausgleichsparameters

Beim linearen Trendmodell kommt der Höhe des Ausgleichsparameters die gleiche Funktion zu wie bei Prognosen eines konstanten Trends durch die einfache exponentielle Ausgleichung. Für die auf mehrfacher exponentieller Ausgleichung von Zeitreihen aufbauenden Prognosemethoden gibt es zur praktischen Festsetzung des Parameters α Empfehlungen, die von Werten ausgehen, wie sie z.B. auf die folgende Art für die einfache exponentielle Ausgleichung von Zeitreihen mit konstantem Trend empfohlen werden.¹⁾

Scheint der stochastische Prozeß, dessen Zeitreihe als Grundlage von Prognosen verwendet werden soll, sehr stabil zu sein, so ist es allgemein empfehlenswert, einen α -Wert von 0,05 zu wählen. Wenn die Stabilität des Prozesses durch einen schnellen Wechsel der Umweltbedingungen vermindert wird, sollte er auf 0,1 erhöht werden. Auch für Absatzzeitreihen industrieller Artikel ist ein α -Wert von 0,1 zu empfehlen, der zur Verbesserung der Anpassungsfähigkeit des Prognosesystems an Strukturänderungen des Prozesses einen Wert von 0,25 annehmen kann. Diese Empfehlungen zur Bestimmung des Ausgleichsparameters bei einfacher exponentieller Ausgleichung bilden die Grundlage für sogenannte äquivalente Werte des Ausgleichsparameters bei mehrfacher exponentieller Ausgleichung von Zeitreihen.²⁾

1) Zu den folgenden Empfehlungen zur Bestimmung des Ausgleichsparameters vgl. R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 149.

2) Dieselbe Quelle wie 1), S. 147.

Mit einem Ausgleichsparameter, dessen Wert einem der empfohlenen Beträge entspricht, wird bei einem konstanten Trend ein Schätzwert für die Trendkomponente a_t durch die folgende Beziehung der exponentiellen Ausgleichung gewonnen:¹⁾

$$\hat{a}_t = x_t + \alpha e_t \quad . \quad (10.1)$$

Für Zeitreihen mit einem linearen Trend erfolgt die Schätzung des konstanten Gliedes des den Trend repräsentierenden Polynoms in ähnlicher Weise wie in (10.1), und zwar in der Form:²⁾

$$\hat{a}_t = x_t + (1 - \alpha)^2 e_t \quad . \quad (10.2)$$

Die Steigung der Geraden wird in diesem Fall durch die Beziehung

$$\hat{b}_t = \hat{b}_{t-1} - \alpha^2 e_t \quad (10.3)$$

geschätzt. Diese Schätzfunktionen lassen sich aus den Linearkombinationen der einfachen und zweifachen exponentiellen Ausgleichung (9.6) und (9.8) ableiten.³⁾

Damit in diesem System die Größe $\hat{a}_t$ durch die gleiche Korrektur des Vorhersagefehlers wie bei einer Zeitreihe mit einem konstanten Trend gewonnen wird, kann man für die doppelte exponentielle Ausgleichung α -Werte bilden, die denen der einfachen exponentiellen Ausgleichung in der

1) Vgl. hierzu Abschnitt 6.3 "Prüfung der asymptotischen Erwartungstreue der exponentiellen Ausgleichung bei absolut konstantem Trend."

2) Vgl. R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 140.

3) Der Beweis, den R.G. BROWN für die dreifache exponentielle Ausgleichung für eine derartige Schreibweise der Koeffizientenschätzung durchgeführt hat, läßt sich auch analog auf die doppelte exponentielle Ausgleichung übertragen; vgl. dieselbe Quelle wie 2), S. 140 ff.

Bestimmung des Trendkoeffizienten a_t äquivalent sind. Bezeichnen die Indizes an den folgenden unterschiedlichen Ausgleichsparametern den Grad der exponentiellen Ausgleichung, denen sie zugeordnet sind, so ist die Äquivalenz bei einem linearen Trend wie folgt definiert:¹⁾

$$(1 - \alpha_2)^2 = 1 - \alpha_1 \quad . \quad (10.4)$$

Um also dieselbe Korrektur des Prognosefehlers e_t zur Schätzung des Koeffizienten a_t in einem linearen Trendmodell wie in einem konstanten Trendmodell zu erreichen, müßten dann die in der Tabelle 3 angeführten Ausgleichsparameterwerte benutzt werden.

In der ersten Spalte der Tabelle steht der Wert, den man bei der einfachen exponentiellen Ausgleichung bei der Unterstellung eines bestimmten Verhaltens eines konstanten Trends einsetzen würde. Entsprechend dazu ist in der zweiten Spalte der Wert des äquivalenten Ausgleichsparameters angegeben, der verwendet werden muß, um die gleiche Korrektur des Prognosefehlers wie bei der einfachen exponentiellen Ausgleichung zur Schätzung von a_t zu erreichen.

1) Vgl. R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 147, ebenso R.G. BROWN und R.F. MEYER: Loc. cit., 680.

Tabelle 3:

Äquivalente Werte des Ausgleichparameters α bei konstantem und linearem Trend¹⁾

konstanter Trend	Linearer Trend
0,01	0,005
0,03	0,015
0,05	0,025
0,10	0,051
0,15	0,078
0,20	0,106
0,25	0,134
0,35	0,163

Es lassen sich nun aber dagegen, daß man sich mit diesen Empfehlungen zufriedengibt und das Verfahren der doppelten exponentiellen Ausgleichung bei linearem Trend aus ähnlichen allgemeinen Erwägungen heraus wie die exponentielle Ausgleichung bei konstantem Trend anwendet, Bedenken erheben. Man muß nämlich beachten, daß die Festsetzung eines α -Wertes bei konstantem Trend auch als Kompromiß zwischen der Stabilität der Prognosen und ihrer Anpassungsfähigkeit an durch Trendänderungen bedingte neue Situationen verstanden wird.²⁾ Eine Transformation dieses Sachverhalts durch die Berechnung äquivalenter Werte scheint jedoch kaum verständlich, zumal sie sich auch nur auf den Koeffizienten a_t und nicht auf das ganze Modell bezieht. Es läßt sich zwar vermuten, daß die Bestimmung des Ausgleichparameters von der Art und dem Ausmaß der Strukturbrüche des Trends abhängt, eine fundierte Berechnung aber erst auf der Basis eines Prozeßmodells möglich ist, das die Strukturänderungen genau qualifiziert.

1) Vgl. R.G. BROWN: Smoothing, Forecasting and Prediction. Loc. cit., S. 149.

2) Siehe hierzu Abschnitt 7.3 "Die Abhängigkeit der Anpassungsfähigkeit und Stabilität der exponentiellen Ausgleichung von der Größe des Ausgleichparameters bei Strukturänderungen des Prozesses".

11. Eigenschaften von Prognosen auf der Grundlage anpassungs- fähiger Prognoseverfahren bei linearem Trend mit Zufalls- weg im Mittelwert

11.1 Allgemeine Abgrenzung der anpassungsfähigen Prognose- verfahren von der exponentiellen Ausgleichung bei linearem Trend

Das konkrete Modell eines stochastischen Prozesses, dessen Zeitreihen sich durch einen linearen Trend beschreiben lassen, und für den die durch lineare Kombination der exponentiellen Ausgleichung gewonnene Prognosefunktion optimale Prognosen ergibt, ist dem Verfasser nicht bekannt. Es existieren jedoch Prozeßmodelle für Zeitreihen mit linearem Trend, für die zur Gewinnung optimaler Prognosen ein Prognoseverfahren vorgeschlagen wird, das eine gewisse Ähnlichkeit mit der exponentiellen Ausgleichung hat. Da es nicht in unmittelbarer Beziehung zu dem Prognosesystem von Ausgleichsoperationen verschiedener Grade der exponentiellen Ausgleichung mit ein- und demselben Ausgleichsparameter steht, wird es nicht durch Begriffe der exponentiellen Ausgleichung bezeichnet, sondern "adaptives"¹⁾ oder gleichbedeutend "anpassungsfähiges" Prognoseverfahren genannt. Die Bezeichnung charakterisiert die Eigenschaft dieses Verfahrens, sich dem Verlauf nichtstationärer Prozesse anpassen zu können.

Es gibt zwei verschiedene Modelle nichtstationärer Prozesse, deren Zeitreihen einen linearen Trend aufweisen, für die man durch ein solches anpassungsfähiges Prognoseverfahren optimale Prognosen bestimmen kann. Ob sich in einem

1) H. WEDEKIND hat z.B. diese Bezeichnung ohne Übersetzung aus der englischsprachigen Literatur übernommen; vgl. H. WEDEKIND: Über einige praktische Anwendungen des optimalen adaptiven Vorhersagens. Ablauf- und Planungsforschung, ⁴ (1966), 175, siehe ebenso H. THEIL und S. WAGE: Some observations on adaptive forecasting. Management Science, 10 (1964), 198 und N. NERLOVE und S. WAGE: On the optimality of adaptive forecasting. Management Science, 10 (1964), 207.

konkreten Fall ein Prozeß durch diese Modelle beschreiben läßt, kann anhand eines einfachen Kriteriums nachgeprüft werden.

11.2 Zeitreihenmodell 1 eines linearen Trends mit Zufalls- weg im Mittelwert

Im ersten Modell ¹⁾ wird angenommen, daß der der Zeitreihe zugrundeliegende Prozeß durch die Beziehung

$$X_t = a_t + Z_t \quad (11.1)$$

beschrieben werden kann. Für den Zeitpunkt t wird der Koeffizient a_t durch den Ausdruck

$$a_t = a_{t-1} + b_t \quad (11.2)$$

dargestellt, in dem b_t den Zuwachs des Trends in der Periode t bezeichnet. Diese Größe b_t selbst entsteht auf die folgende Art:

$$b_t = b_{t-1} + Y_t \quad , \quad (11.3)$$

wobei Y_t ein reiner Zufallsprozeß mit einem Mittelwert von Null und endlicher Varianz ist.

Der stochastische Prozeß, aus dem die Zeitreihenwerte stammen, kommt also, wie die Beziehung (11.1) zeigt, durch die Überlagerung der Strukturkomponente a_t durch den Zufallsprozeß Z_t zustande. Die Strukturkomponente a_t ihrerseits läßt sich bei einem linearen Trend von Periode zu

1) Vgl. hierzu H. THEIL und S. WAGE: Loc. cit., 201.

Periode in der angegebenen Form (11.2) durch Addition des Trendzuwachses zur Höhe des systematischen Teils des Prozesses in der Vorperiode bestimmen. Da Y_t ein Zufallsprozeß mit einem Mittelwert von Null und endlicher Varianz ist, erkennt man aus der Bedingung (11.3), daß der Prozeß X_t einen Zufallswegprozeß im Mittelwert bildet. Daraus läßt sich sofort folgern, daß dieser Prozeß nichtstationär ist.¹⁾

11.3 Zeitreihenmodell 2 eines linearen Trends mit Zufallsweg im Mittelwert

Auch das zweite Modell ²⁾ eines linear mit der Zeit wachsenden Prozesses wird durch die Beziehung

$$X_t = a_t + Z_t \quad (11.4)$$

grundlegend gekennzeichnet. Es unterscheidet sich jedoch dadurch von dem Zeitreihenmodell 1, daß nicht nur die Steigung des Trends ein Zufallswegprozeß ist, sondern auch der Koeffizient a_t der Strukturkomponente einen Zufallsweg bildet. Diese Zusammenhänge werden durch das folgende mathematische System (11.5) und (11.6) dargestellt.

$$a_t = a_{t-1} + b_t + W_t \quad (11.5)$$

$$b_t = b_{t-1} + Y_t \quad . \quad (11.6)$$

a_t und b_t sind wie in dem ersten Modell die Größen, die in linearen Modellen üblicherweise als Achsenabschnitt auf der Ordinate und Steigung der Geraden bezeichnet werden.

1) Vgl. hierzu Abschnitt 2.5 "Ein Zufallswegprozeß".

2) Vgl. hierzu P.J. HARRISON: Exponential smoothing. Loc. cit., 830.

Die Größe a_t und damit ebenfalls X_t , wächst jedoch nicht nur mit der konstanten Zuwachsrate b_t , sondern nimmt außerdem um eine zufällige Größe W_t zu oder ab. W_t wird als ein reiner Zufallsprozeß unkorrelierter Zufallsvariabler mit einem Mittelwert von Null und mit endlicher Varianz betrachtet. Das bedeutet, daß a_t genau wie die Größe b_t , die hier auf die gleiche Art unter den gleichen Voraussetzungen entsteht wie im ersten Zeitreihenmodell, ein Zufallswegprozeß ist.

Der stochastische Prozeß X_t kann also als ein Zufallswegprozeß, der durch einen Zufallsprozeß Z_t überlagert wird, bezeichnet werden. Für einen solchen Prozeß läßt sich, ähnlich wie es auch bei konstantem Trend geschehen ist, eine ökonomische Interpretation finden.¹⁾ Sie liegt im wesentlichen in der Auffassung, daß die Nachfrage eines Absatzgutes aus der "wahren" Nachfrage besteht, die in ihrem Trend zufälligen Einflüssen unterliegt und außerdem von einem Zufallsfehler überlagert wird. Auch für das erste Zeitreihenmodell läßt sich eine solche Interpretation angeben, indem die Größe a_t von der Zufallsweghypothese ausgeschlossen wird, und die zufälligen Veränderungen des Trends allein den schwankenden Zuwachsraten der "wahren" Nachfrage zugeschrieben werden.

Wenn man auch sofort ohne weitere Untersuchung vermuten kann, daß die in dem Prozeß enthaltenen Zufallseinflüsse praktisch nicht zu trennen sind, so bilden sie dennoch ein anschauliches Modell für das fast ausschließlich in der Realität vorzufindende nichtstationäre Verhalten von Absatzzeitreihen und stellen außerdem eine Beziehung zu einem praktisch sehr nützlichen Prognoseverfahren her.

1) Siehe hierzu Abschnitt 3.5 "Ein Zufallswegmodell für Güter mit linear steigendem Absatzverlauf".

11.4 Ein anpassungsfähiges Prognoseverfahren für Zeitreihen mit linearem Trend

Die Ähnlichkeit des in diesem Abschnitt behandelten Verfahrens mit der doppelten exponentiellen Ausgleichung liegt in der beiderseitigen Verwendung des Grundprinzips der exponentiellen Ausgleichung, das in der Korrektur der Prognose der Vorperiode zur Gewinnung einer neuen Prognose besteht. Zu den nachfolgenden Ausführungen darüber muß noch vermerkt werden, daß sie auch hier wieder für Prognosen für eine Periode in die Zukunft gelten, sie sich jedoch analog auf Prognosen für mehrere Perioden in die Zukunft ausdehnen lassen.¹⁾

Eine Prognose für eine Periode in die Zukunft setzt sich bei einem linearen Trend aus den Schätzungen der Größen a_t und b_t zum Zeitpunkt t zusammen, wie es in der folgenden Beziehung ausgedrückt ist:

$$x_{t,1}^* = \hat{a}_t + \hat{b}_t \quad . \quad (11.7)$$

Der allgemeine Fall einer Prognose von h Perioden in die Zukunft läßt sich in der Form

$$x_{t,h}^* = \hat{a}_t + \hat{b}_t h \quad (11.8)$$

darstellen, aus der sich die Beziehung (11.7) als Spezialfall gewinnen läßt.

Die Schätzungen der Koeffizienten dieser Prognosefunktionen sollen auf die folgende Art nach dem Prinzip der Anpassung an den nichtstationären Prozeßverlauf, der im wesentlichen

1) Ähnlich auch N. NERLOVE und S. WAGE: Loc. cit., 212.

durch den Zufallswegcharakter der Koeffizienten charakterisiert wird, vorgenommen werden:

$$\hat{a}_t = \alpha x_t + (1 - \alpha) (\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1}) \quad . \quad (11.9)$$

Hier kommt bereits die Ähnlichkeit mit der exponentiellen Ausgleichung zum Ausdruck, da die Summe der Schätzungen der beiden Koeffizienten $\hat{a}_{t-1}$ und $\hat{b}_{t-1}$ die Prognose der Vorperiode für die gegenwärtige Periode t bildet, die mit einem bestimmten Bruchteil zur Schätzung des Koeffizienten a_t beiträgt. Diese Beziehung kann unter Berücksichtigung des gerade angeführten Zusammenhanges in die folgende bei linearen Trendmodellen geläufigere Form umgewandelt werden:¹⁾

$$\hat{a}_t = \hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1} + \alpha (x_t - x_{t-1,1}^*) \quad . \quad (11.10)$$

Da $x_{t-1,1}^*$ die Prognose der Vorperiode für die gegenwärtige Periode darstellt, enthält der letzte Klammerausdruck dieser Beziehung den Prognosefehler $e_{t,1}$. Die Schätzung des neuen Trendkoeffizienten $\hat{a}_t$ kommt also durch die Korrektur der Prognose der Vorperiode für den gegenwärtigen Zeitpunkt um einen Bruchteil des Prognosefehlers zustande.

Um eine Prognose für einen zukünftigen Zeitpunkt zu gewinnen, muß auch die Steigung b_t , d.h. der Zuwachs des Prozesses im Mittel geschätzt werden. Da nicht mit jedem neuen Beobachtungswert auch diese Größe beobachtet wird, begnügt man sich zu ihrer Schätzung damit, als neu beobachtete Steigung die Differenz der Schätzungen des Koeffizienten a_t derselben und der vorherigen Periode zu nehmen. Als Rekursionsformel für die neue Schätzung von b_t , die der Prognose

1) Vgl. N. NERLOVE und S. WAGE: Loc. cit., 209.

zugrundeliegen soll, erhält man dann:¹⁾

$$\hat{b}_t = \beta (\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}) + (1 - \beta) \hat{b}_{t-1} \quad (11.11)$$

Auch diese Beziehung, in der β ein Ausgleichsparameter mit einem Wert zwischen 0 und 1 ist, läßt sich noch in eine andere geläufigere Form überführen. Setzt man in die letzte Beziehung (11.11) zunächst den oben in (11.10) gewonnenen Wert für a_t ein, dann erhält man:

$$\hat{b}_t = \beta (\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1} + \alpha e_{t,1} - \hat{a}_{t-1}) + (1 - \beta) \hat{b}_{t-1} \quad (11.12)$$

Durch Ausmultiplizieren der Klammern geht diese Beziehung in

$$\hat{b}_t = \beta \hat{b}_{t-1} + \alpha \beta e_{t,1} + \hat{b}_{t-1} - \beta \hat{b}_{t-1} \quad (11.13)$$

über, worauf sofort die endgültige Form

$$\hat{b}_t = \hat{b}_{t-1} + \alpha \beta e_{t,1} \quad (11.14)$$

folgt. Sie bedeutet, daß die Schätzung der neuen für die Prognose benötigten Zuwachsrates des Prozesses gleich der Schätzung dieser Größe in der Vorperiode, korrigiert durch einen Bruchteil des Prognosefehlers $e_{t,1}$ ist. Das Produkt der beiden Ausgleichsparameter α und β ist positiv und kleiner oder gleich 1, da beide voraussetzungsgemäß nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen können.

11.5 Allgemeine Eigenschaften von Prozessen, für die das Anpassungsfähige Prognoseverfahren optimale Prognosen ergibt

Wenn das durch den letzten Abschnitt vorgestellte Prognose-system auf Zeitreihen angewandt werden soll, die den Zeit-

1) Vgl. P.R. WINTERS: Loc. cit., 330.

reihenmodellen 1 und 2 entsprechen, ist es interessant zu wissen, ob es auch die besten Prognosen für die entsprechenden Prozesse liefert. Es kann ganz allgemein gefragt werden, welche Kriterien die Prozesse erfüllen müssen, für die das anpassungsfähige Prognoseverfahren optimale Prognosen ergibt.

In der oben angegebenen Form (11.10) und (11.14) sagt das Prognosesystem sehr wenig über die strukturellen Eigenschaften von Zeitreihen aus, auf die es optimal angewendet werden kann. Es soll deshalb zur Offenlegung solcher Strukturen noch weiter untersucht werden.

Schreibt man die Schätzfunktion für b_t in einer anderen Form, und zwar als Summe der Realisationen $e_{t,1}$ des Zufallsprozesses des Prognosefehlers, so erhält man aus (11.14), weil $\hat{b}_t$, wie sich aus dieser Beziehung selbst entnehmen läßt, ein Zufallswegprozeß ist, die Form

$$\hat{b}_t = \alpha \beta \sum_{i=0}^{\infty} e_{t-i,1} \quad (11.15)$$

Bei einer Prognose für eine Periode in die Zukunft bedient man sich der Beziehung (11.7). Setzt man in diese Funktion die entsprechenden oben in (11.10) und (11.15) gewonnenen Ausdrücke für $\hat{a}_t$ und $\hat{b}_t$ in, dann erhält man:

$$x_{t,1}^* = \hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1} + \alpha e_{t,1} + \alpha \beta \sum_{i=0}^{\infty} e_{t-i,1} \quad (11.16)$$

Da die Summe der ersten beiden Glieder der rechten Seite dieses Ausdrucks der Prognose der Vorperiode für die gegenwärtige Periode t gleich ist, also die Beziehung

$$x_{t-1,1}^* = \hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1} \quad (11.17)$$

gilt, folgt weiter aus (11.16):¹⁾

$$x_{t,1}^* - x_{t-1,1}^* = \alpha e_{t,1} + \alpha \beta \sum_{i=0}^{\infty} e_{t-i,1} \quad (11.18)$$

Um eine Interpretation dieses Ergebnisses geben zu können, soll noch einmal an die Gedankengänge des Abschnitts 8.1 angeknüpft werden.²⁾

Es hatte sich dort gezeigt, daß für einen Prozeß, der sich durch die Beziehung

$$x_{t+1} = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \alpha)^i x_{t-i} + y_{t+1} \quad (11.19)$$

darstellen läßt, die auf den Zeitreihenwerten x_t in der Form

$$x_{t,1}^* = \beta \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \beta)^i x_{t-i} \quad (11.20)$$

aufbauenden Prognosen optimal im Sinne der minimalen mittleren Prognosefehlerquadratsumme sind, wenn es gelingt, den Parameter β so zu bestimmen, daß er mit α übereinstimmt. Sollte das gelungen sein, dann sind die Prognosefehler den Zufallsgrößen y_t gleich, und eine Prognose

$$\Delta x_{t,1}^* = \alpha e_{t,1} \quad (11.21)$$

in der $\Delta x_{t,1}^*$ eine Realisation des Prozesses der ersten Differenzen eines stochastischen Prozesses ist, gilt als

-
- 1) Ähnlich auch P.J. HARRISON: Short-term sales forecasting. Journal of the Royal Statistical Society, Series C, 14 (1965), 107.
 - 2) Siehe Abschnitt 8.1 "Allgemeine Eigenschaften von Prozessen, für die die exponentielle Ausgleichung optimale Prognosen ergibt."

optimale Prognose für den Prozeß

$$\Delta X_{t+1} = \Delta Y_{t+1} + \alpha Y_t \quad (11.22)$$

Auf diese Zusammenhänge wird hier deshalb noch einmal eingegangen, weil für die Beziehung (11.18) jetzt analog gefolgert werden kann, daß sie eine optimale Prognose für den Prozeß

$$\Delta X_{t+1} = \Delta Y_{t+1} + \alpha Y_t + \alpha \beta \sum_{i=0}^{\infty} Y_{t-i} \quad (11.23)$$

darstellt.¹⁾ X_{t+1} kann auch als erste Differenz eines Prozesses X_t aufgefaßt werden, dessen Werte prognostiziert werden sollen. Da auch seine ersten Differenzen nicht stationär sind, wie man an der Zufallswegkomponente

$$\alpha \beta \sum_{i=0}^{\infty} Y_{t-i} \quad (11.24)$$

erkennt, soll noch ein weiterer Schritt getan werden, um diesen Prozeß mit Kriterien stationärer Prozesse kennzeichnen zu können.

Bildet man aus der Beziehung (11.23) die ersten Differenzen, so geht sie in

$$\Delta^2 X_{t+1} = \Delta^2 Y_{t+1} + \alpha \Delta Y_t + \alpha \beta Y_t \quad (11.25)$$

über. Die in (11.24) dargestellte Summe aus (11.23) wird dabei in das letzte Glied der Summe von (11.25) transformiert. Der Ausdruck (11.24) läßt sich nämlich auch in der Form

$$\alpha \beta \sum_{i=0}^{\infty} Y_{t-i} = \alpha \beta (Y_t + Y_{t-1} + Y_{t-2} + \dots) \quad (11.26)$$

1) Für den allgemeinen Fall anpassungsfähiger Prognoseverfahren für Trendmodelle, die durch ein Polynom vom Grade n dargestellt werden können, siehe G.E.P. BOX und G.M. JENKINS: Some statistical aspects, Loc. cit., 313, ebenso P.J. HARRISON: Exponential smoothing, Loc. cit., 824.

schreiben. Bildet man dafür die erste Differenz auf die folgende Art¹⁾:

$$\Delta(\alpha\beta \sum_{i=0}^{\infty} Y_{t-i}) = \alpha\beta (\Delta Y_t + \Delta Y_{t-1} + \Delta Y_{t-2} + \dots) \quad (11.27)$$

und schreibt die Differenzen der Summenglieder aus, dann gelangt man zu der Darstellung:

$$\alpha\beta (\Delta Y_t + \Delta Y_{t-1} + \Delta Y_{t-2} + \dots) =$$

$$\alpha\beta [(Y_t - Y_{t-1}) + (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + (Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \dots] \quad (11.28)$$

Aus diesem Ausdruck läßt sich sofort erkennen, daß durch die Differenzenbildung nur das Anfangsglied der Summe (11.24) übrig bleibt.

Eine weitere Umformung läßt sich noch aus der Beziehung (11.25) bilden, wenn man die Differenzenausdrücke von Y_t auflöst:

$$\Delta^2 X_{t+1} = Y_{t+1} - 2 Y_t + Y_{t-1} + \alpha Y_t - \alpha Y_{t-1} + \alpha\beta Y_t. \quad (11.29)$$

Faßt man die Glieder der Summe der rechten Seite dieser Gleichung noch zusammen, dann ergibt sich:

$$\Delta^2 X_{t+1} = Y_{t+1} + (\alpha + \alpha\beta - 2) Y_t + (1 - \alpha) Y_{t-1}. \quad (11.30)$$

Diese Differenzengleichung zweiter Ordnung hat für das betrachtete Prognosesystem eine besondere Bedeutung. Der Ausgangspunkt dafür ist, daß das anpassungsfähige Prognoseverfahren in der Form (11.18) optimale Prognosen für einen

1) Über die Eigenschaften des Differenzenoperators bei seiner Anwendung auf algebraische Ausdrücke siehe C. JORDAN: Calculus of Finite Differences. 2nd Edition. New York: Chelsea Publishing Company, 1950, S. 7.

nichtstationären Prozeß (11.23) ergibt, den man als erste Differenz eines Prozesses X_t auffassen kann. Dieser Prozeß der ersten Differenzen läßt sich durch eine weitere Transformation in die Beziehung (11.30) überführen. Aus dieser Funktion läßt sich entnehmen, daß die zweiten Differenzen von X_t einen Prozeß gleitender Durchschnitte zweiter Ordnung bilden, weil Y_t voraussetzungsgemäß ein Prozeß unkorrelierter Zufallsvariabler ist. Ganz allgemein kann man aus diesem Zusammenhang schließen, daß das anpassungsfähige Prognoseverfahren für solche stochastischen Prozesse optimale Prognosen ergibt, deren zweite Differenzen sich als ein stationärer Prozeß gleitender Durchschnitte zweiter Ordnung darstellen lassen¹⁾.

11.6 Überprüfung der zweiten Differenzen der Zeitreihenmodelle 1 und 2 auf ihr stochastisches Verhalten in der Zeit

Für die beiden Zeitreihenmodelle 1 und 2 soll jetzt geprüft werden, ob sie die Eigenschaft besitzen, daß ihre zweiten Differenzen als ein Prozeß gleitender Durchschnitte zweiter Ordnung dargestellt werden können. Aus dieser Prüfung läßt sich dann schließen, ob das anpassungsfähige Prognoseverfahren optimale Prognosen für die entsprechenden Prozesse ergeben kann.

Das erste Modell wurde durch das System

$$X_t = a_t + Z_t, \quad (11.1)$$

$$a_t = a_{t-1} + b_t, \quad (11.2)$$

$$b_t = b_{t-1} + Y_t \quad (11.3)$$

1) Ähnlich auch P.J. HARRISON: Exponential smoothing. Loc. cit., 832.

beschrieben, in denen die einzelnen Größen die schon angegebenen Eigenschaften haben.

Bildet man für die Beziehung (11.1) die zweite Differenz, so erhält man

$$\Delta^2 x_t = \Delta^2 a_t + \Delta^2 z_t \quad (11.31)$$

Schreibt man zunächst die zweite Differenz von a_t aus, um die Beziehung

$$\Delta^2 x_t = a_t - 2 a_{t-1} + a_{t-2} + \Delta^2 z_t \quad (11.32)$$

zu gewinnen, dann kann man unter Berücksichtigung des aus der Gleichung (11.2) des Modells gewonnenen Ausdrucks

$$a_t - a_{t-1} = b_t \quad (11.33)$$

weiter zu der folgenden Form

$$\Delta^2 x_t = b_t - a_{t-1} + a_{t-2} + \Delta^2 z_t \quad (11.34)$$

gelangen. Aus der zweiten Beziehung (11.2) des Modells läßt sich ebenfalls der Ausdruck

$$a_{t-1} = a_{t-2} + b_{t-1} \quad (11.35)$$

durch eine Zeitverschiebung um eine Periode gewinnen.

Bildet man hieraus

$$a_{t-2} - a_{t-1} = - b_{t-1} \quad (11.36)$$

und setzt diese Beziehung für b_{t-1} in die Gleichung

(11.34) ein, dann erhält man

$$\Delta^2 X_t = b_t - b_{t-1} + \Delta^2 Z_t \quad . \quad (11.37)$$

Für die ersten beiden Summanden der rechten Seite dieses Ausdrucks läßt sich aus der obigen Modellbeziehung (11.3) die Umformung

$$b_t - b_{t-1} = Y_t \quad (11.38)$$

erreichen und in (11.37) einsetzen:

$$\Delta^2 X_t = Y_t + \Delta^2 Z_t \quad . \quad (11.39)$$

Schreibt man nun noch in (11.39) die zweite Differenz von Z_t aus, dann erhält man

$$\Delta^2 X_t = Y_t + Z_t - 2 Z_{t-1} + Z_{t-2} \quad . \quad (11.40)$$

Da die Zufallsvariablen Y_t und Z_t voraussetzungsgemäß unkorreliert sind, läßt sich dieser Ausdruck, da er eine lineare Kombination dieser Größen ist, als ein gleitender Durchschnitt zweiter Ordnung bezeichnen. Damit ist nachgewiesen, daß es möglich ist, mit Hilfe des Prognosesystems der anpassungsfähigen Ausgleichung für Zeitreihen, die sich durch das Zeitreihenmodell 1 beschreiben lassen, optimale Prognosen zu erhalten.

Dieser Nachweis läßt sich auch für das zweite Modell erbringen. Hier war der Ausgangspunkt das Prozeßmodell

$$X_t = a_t + Z_t, \quad (11.4)$$

$$a_t = a_{t-1} + b_t + W_t, \quad (11.5)$$

$$b_t = b_{t-1} + Y_t \quad . \quad (11.6)$$

Bildet man für die erste Beziehung die zweite Differenz

$$\Delta^2 X_t = \Delta^2 a_t + \Delta^2 Z_t, \quad (11.41)$$

und schreibt sie in der Form

$$\Delta^2 X_t = a_t - 2 a_{t-1} + a_{t-2} + \Delta^2 Z_t, \quad (11.42)$$

dann läßt sie sich wegen des aus (11.5) gewonnenen Ausdrucks

$$a_t - a_{t-1} = b_t + W_t \quad (11.43)$$

in die Gleichung

$$\Delta^2 X_t = b_t + W_t - a_{t-1} + a_{t-2} + \Delta^2 Z_t \quad (11.44)$$

überführen. Da sich aus (11.5) des Modells die Beziehung

$$a_{t-2} - a_{t-1} = -b_{t-1} - W_{t-1} \quad (11.45)$$

ableiten läßt, erreicht man unter ihrer Verwendung für $\Delta^2 X_t$ den Ausdruck

$$\Delta^2 X_t = b_t + W_t - b_{t-1} - W_{t-1} + \Delta^2 Z_t. \quad (11.46)$$

Aus der Beziehung (11.6) für den Koeffizienten b_t erhält man den Ausdruck

$$b_t - b_{t-1} = Y_t, \quad (11.47)$$

der sich in (11.46) einsetzen läßt, so daß man die end-

gültige Form

$$\Delta^2 X_t = Y_t + W_t - W_{t-1} + Z_t - 2 Z_{t-1} + Z_{t-2} \quad (11.48)$$

erhält. Genau wie beim ersten Modell sagt das Ergebnis, daß die Prognosen, die mit Hilfe der Fortschreibung der Schätzwerte der Koeffizienten a_t und b_t durch das anpassungsfähige Prognoseverfahren gewonnen werden, für das Zeitreihenmodell optimal sind, wenn es gelingt, für die Ausgleichsparameter α und β die optimalen Werte zu bestimmen.

11.7 Die Bestimmung der optimalen Ausgleichsparameter des anpassungsfähigen Prognoseverfahrens bei linearem Trend mit Zufallsweg im Mittelwert (Zeitreihenmodell 1)

Für die theoretische Bestimmung der optimalen Werte von α und β spielen, wie zu erwarten ist, die statistischen Merkmale der Zufallsvariablen des beschriebenen Prozesses die entscheidende Rolle. Für das erste Modell sind das die Parameter der Zufallsprozesse Z_t und Y_t , deren Varianzen hier mit $\sigma_{Z_t}^2$ und $\sigma_{Y_t}^2$ bezeichnet werden sollen.

Wie schon bei der exponentiellen Ausgleichung von Zeitreihen mit konstantem Trend ¹⁾ kann ganz allgemein das Problem univariabler linearer Prognosen bei festem Gewichtsparemeter durch die Beziehung

$$x_{t,h}^* = \sum_{i=0}^{\infty} w_i x_{t-i} \quad (11.49)$$

1) Siehe Abschnitt 8.1 "Allgemeine Eigenschaften von stochastischen Prozessen, für die die exponentielle Ausgleichung optimale Prognosen ergibt".

beschrieben werden.¹⁾ Wenn auch der Zusammenhang zwischen diesem Ausdruck und dem anpassungsfähigen Prognoseverfahren in dieser Form nicht offensichtlich ist, haben beide jedoch einen Punkt gemeinsam. Er liegt in der Forderung fester Ausgleichsparameter, die in (11.49) durch die Gewichte w_1 gegeben sind, während sie im anpassungsfähigen Prognoseverfahren durch die festen Korrekturgrößen α und β gegeben sind.

Für ein solches allgemeines lineares Prognoseverfahren gilt als Kriterium optimaler Prognosen, daß der mittlere Quadratfehler der Prognosen ein Minimum sein soll.²⁾ Diese Forderung wird in der folgenden Form ausgedrückt:

$$E(x_{t+h} - x_{t,h}^*)^2 = \text{Min!} \quad (11.50)$$

Setzt man für $x_{t,h}$ die Prognosefunktion (11.49) ein, dann ergibt sich in bezug auf die Gewichte w_1 die Forderung:

$$E(x_{t+h} - \sum_{i=0}^{\infty} w_1 x_{t-i})^2 = \text{Min!} \quad (11.51)$$

Geht man aber davon aus, daß die Größen x_t Zeitreihenwerte eines nichtstationären Prozesses sind, dann ist der mittlere Quadratfehler der Prognose nicht allgemein eine genau definierte Funktion, deren Minimum bestimmt werden kann. Es muß vielmehr für jedes Prognoseverfahren nichtstationärer Prozesse gezeigt werden, daß die Quadratsumme der Prognosefehler gegen ein Minimum konvergiert. Bei der exponentiellen Ausgleichung wurde bei der Bestimmung des optimalen Ausgleichsparameters nur eine Lösung des Systems zugelassen,

1) Die folgenden Ausführungen sind eine Darstellung der Ableitung optimaler Ausgleichsparameter von N. NERLOVE und S. WAGE; vgl. hierzu N. NERLOVE und S. WAGE: Loc. cit., 207-224. Eine andere Ableitung stammt von H. THEIL und S. WAGE; siehe H. THEIL und S. WAGE: Loc. cit., 198-206.

2) Vgl. N. NERLOVE und S. WAGE: Loc. cit., 211.

damit die Forderung der Konvergenz der Quadratsumme der Prognosefehler gegen ein Minimum erfüllt ist. ¹⁾

Man kann aber allgemein zur Bestimmung optimaler Prognosen für nichtstationäre Prozesse nach dem Prinzip vorgehen, daß man eine lineare Transformation der Zeitreihe sucht, die sie in den stationären Zustand überführt. Bildet man auf der Grundlage der transformierten Zeitreihe, die man dann als Realisation eines stationären Prozesses betrachten kann, für den die minimale Summe der Fehlerquadratabweichungen genau bestimmt ist, eine Prognose und macht anschließend die Transformation wieder rückgängig, dann kann man die daraus gewonnene Prognose als optimal für die Ursprungszeitreihe bezeichnen. ²⁾

Wie bereits ausgeführt wurde, bilden die zweiten Differenzen des hier behandelten Modells einen stationären stochastischen Prozeß. Die Bildung der zweiten Differenzen stellt also eine Transformation für das Zeitreihenmodell 1 (ebenso für das Zeitreihenmodell 2) dar, die die Zeitreihe in einen stationären Zustand überführt. Die Prognose eines Wertes dieses stationären Prozesses für eine Periode voraus gibt durch die folgende Beziehung den Zusammenhang zwischen der Ursprungszeitreihe und ihrer zweiten Differenz an:

$$\Delta^2 x_{t,1}^* = x_{t,1}^* - 2 x_t + x_{t-1} \quad (11.52)$$

In der Periode t , in der die Prognose durchgeführt wird, sind die Zeitreihenwerte x_t und x_{t-1} schon bekannt. Für den noch unbekannten Beobachtungswert x_{t+1} ist entsprechend sein Prognosewert der Periode t eingesetzt. Da der Prozeß $\Delta^2 x_t$ stationär ist, seine Parameter also zeitunabhängig

1) Siehe Abschnitt 8.3 "Die Bestimmung des optimalen Ausgleichsparameters bei konstantem Trend mit Zufallsweg im Mittelwert".

2) Vgl. N. NERLOVE und S. WAGE: Loc. cit., 212.

und somit konstant sind, ist der Ausdruck

$$E(\Delta^2 x_{t+1} - \sum_{i=0}^{\infty} v_i \Delta^2 x_{t-i})^2 \quad (11.53)$$

eine genau bestimmte Größe, so daß in dem Prognosesystem

$$\Delta^2 x_{t,1}^* = \sum_{i=0}^{\infty} v_i \Delta^2 x_{t-i} \quad (11.54)$$

die Gewichte so bestimmt werden können, daß der Erwartungswert der Prognosefehlerquadratsumme ein Minimum ist. Eine auf diese Art gewonnene Prognose $\Delta^2 x_{t,1, \text{opt}}^*$ kann dann benutzt werden, um durch Einsetzen in die obige Ausgangsbeziehung (11.52) für $\Delta^2 x_t$ die optimale Prognose für x_{t+1} zu bilden:

$$\Delta^2 x_{t,1, \text{opt}}^* = x_{t,1, \text{opt}}^* - 2 x_t + x_{t-1} \quad (11.55)$$

Daraus folgt für x_{t+1} :

$$x_{t,1, \text{opt}}^* = \Delta^2 x_{t,1, \text{opt}}^* + 2 x_t - x_{t-1} \quad (11.56)$$

Wenn auf diese Art und Weise Prognosen für mehrere Perioden in die Zukunft gebildet werden sollen, dann müssen mehrere Prognosen der zweiten Differenzen berechnet werden, um alle Werte einer solchen Prognosefunktion zur Verfügung zu haben und die Transformation rückgängig machen zu können.

Das Problem optimaler Prognosen nichtstationärer Zeitreihen ist also, wie aus den vorangegangenen Ausführungen hervorgeht, auf das Problem der Bestimmung der optimalen Gewichte in einem linearen Prognosesystem zurückgeführt worden, in

das die Zeitreihenwerte des in einen stationären Zustand transformierten Prozesses eingehen. Es kann gezeigt werden, daß die Suche nach den optimalen Ausgleichsparametern α und β in den anpassungsfähigen Prognoseverfahren diesem Problem der Bestimmung der optimalen Gewichte äquivalent ist.

Diese Äquivalenz läßt sich nachweisen¹⁾, wenn man das hier betrachtete anpassungsfähige Prognosesystem ebenfalls in zweite Differenzen überführt, dann in einer inhomogenen Differenzengleichung darstellt und durch deren Lösung genau auf dasselbe Prognoseverfahren (11.54) für die zweiten Differenzen eines nichtstationären Prozesses stößt. In diese Beziehung gehen dann über die Differenzenbildung auch die Ausgleichsparameter ein. Es läßt sich nachweisen²⁾, daß mit der Bestimmung der ersten beiden Gewichte des Gewichtungsschemas v_1 , und zwar der optimalen Gewichte, gleichzeitig die beiden Parameter α und β ihren optimalen Wert annehmen.

Diese optimalen Werte werden nach den oben angegebenen Kriterien (11.53) bestimmt und führen zu dem von N. WIENER entwickelten Verfahren³⁾⁴⁾. Durch dieses Verfahren gehen dann durch die Autokovarianzfunktion die charakteristischen Werte des Ursprungsprozesses, nämlich die Parameter der seinen Verlauf bestimmenden Zufallsvariablen, in die Festlegung der optimalen Werte ein, weil die Autokovarianzfunktion des Prozesses $\Delta^2 x_t$ sich durch diese Parameter darstellen läßt.⁵⁾

1) Siehe hierzu N. NERLOVE und S. WAGE: Loc. cit., 211 ff.

2) Dieselbe Quelle wie 1), 214.

3) Vgl. N. NERLOVE und S. WAGE: Loc. cit., 215.

4) Siehe auch Abschnitt 4.2 "Prognosen stationärer Prozesse".

5) Dieselbe Quelle wie 3), 208.

Die optimalen Parameter α_{opt} und β_{opt} haben die Werte¹⁾:

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2h}{1+h} \quad , \quad (11.57)$$

$$\beta_{\text{opt}} = h \quad . \quad (11.58)$$

Die Größe h ist auf die folgende Art bestimmt:

$$h^2 = -\frac{1}{8} \frac{\sigma_{Y_t}^2}{\sigma_{Z_t}^2} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_{Y_t}}{\sigma_{Z_t}} \sqrt{1 + \frac{1}{16} \frac{\sigma_{Y_t}^2}{\sigma_{Z_t}^2}} \quad . \quad (11.59)$$

Aus diesen Beziehungen geht hervor, daß die Werte der optimalen Ausgleichsparameter von dem Varianzenverhältnis der Zufallsprozesse Y_t und Z_t abhängen. Auch hier lassen sich allgemeine Aussagen, wie im Falle der einfachen exponentiellen Ausgleichung, über die Abhängigkeit des Ausgleichsparameters und damit der Prognosen vom Verhältnis der Prozesse der Zufallskomponente Z_t und der Zufallswegkomponente Y_t zueinander machen.

Die Tendenz der Veränderung der Ausgleichsparameter wird durch die Betrachtung zweier extremer Varianzenverhältnisse deutlich. Ist die Varianz der Zufallswegkomponente Y_t sehr gering gegenüber der Varianz der Beobachtungswerte um den Trend, dann wird auch die Wurzel aus der Beziehung (11.59) für h^2 entsprechend geringer sein, als wenn die Zufallswegkomponente eine große Varianz hätte, die gegenüber der Varianz der Zeitreihenwerte in bezug auf den Trend stark

1) Vgl. N. NERLOVE und S. WAGE: Loc. cit., 219, ebenso H. THEIL und S. WAGE: Loc. cit., 205.

ins Gewicht fallen würde. Daraus läßt sich in Verbindung mit der Beziehung (11.57) erkennen, daß der α -Wert proportional mit dem Varianzenverhältnis von Y_t und Z_t zunimmt. Das gleiche gilt für den Ausgleichsparameter β , dessen Wert direkt proportional zu h ist.

Aus dem Prognosesystem der anpassungsfähigen Prognose bei linearem Trend, das durch die Beziehungen (11.8), (11.9) und (11.14) dargestellt werden kann, läßt sich deshalb entnehmen, daß die Prognosen umso stärker auf jüngeren Beobachtungswerten aufbauen je größer die Zufallsschwankungen des Trends gegenüber den Zufallsschwankungen der Beobachtungswerte um den Trend sind. Damit ist die Tendenz in der Größe der optimalen Ausgleichsparameter und ihr Einfluß auf die Prognosen bei Veränderung des Varianzenverhältnisses der beiden Zufallsprozesse gekennzeichnet. Einer hohen Stabilität des stochastischen Prozesses entsprechen niedrige Ausgleichsparameter, während bei zunehmender Instabilität durch Vergrößerung der Varianz der Zufallswegkomponente die Ausgleichsparameter in ihrem Wert zunehmen und dadurch immer stärker die jüngere Vergangenheit bei der Durchführung von Prognosen berücksichtigen.

Bei der praktischen Bestimmung der Ausgleichsparameter α und β stößt man auf die gleiche Schwierigkeit wie bei der exponentiellen Ausgleichung bei konstantem Trend. Sie liegt in der Schätzung des Varianzenverhältnisses der Trendschwankungen zu den Abweichungen der Zeitreihenwerte vom Trend.

Es gibt jedoch Untersuchungen über die Wirkungen von Fehlschätzungen in der Größe dieses Varianzenverhältnisses. Stellt man für theoretisch konstruierte Fälle von Zeitreihenprozessen, die die Bedingungen des Modells erfüllen, Berechnungen darüber an, wie stark der Prognosefehler der zweiten Differenzen steigt, wenn man nicht die Ausgleichsparameter für eine Prognose mit dem tatsächlichen vorge-

gegebenen Varianzenverhältnis bestimmt, sondern von diesem Verhältnis in Höhe eines bestimmten Betrags abweicht, dann kann man feststellen, daß die Prognosefehlerquadratsumme mit einer groben Fehlschätzung des Verhältnisses der Varianzen von Y_t und Z_t nur gering steigt. ¹⁾

Man trifft also auch hier auf die gleiche Unempfindlichkeit des Verfahrens in den Prognosefehlern gegenüber Fehlern in der Schätzung der Parameter des Prozesses wie bei der einfachen exponentiellen Ausgleichung. Diese Tatsache spricht dafür, auch hier wegen der Schwierigkeiten der Schätzung des Varianzenverhältnisses Empfehlungen für die Festsetzung der Ausgleichsparameter zu folgen, die mit 0,25 für α und 0,15 für β angegeben werden können. ²⁾

11.8 Die Bestimmung der optimalen Ausgleichsparameter des anpassungsfähigen Prognoseverfahrens bei linearem Trend mit Zufallsweg im Mittelwert (Zeitreihenmodell 2)

Im zweiten Zeitreihenmodell, das durch die Beziehungen (11.4), (11.5) und (11.6) dargestellt wird, ist ein Zufallsprozeß mehr enthalten als im ersten Modell, so daß in die Bestimmung der optimalen Werte für die Ausgleichsparameter α und β bei Anwendung des anpassungsfähigen Prognoseverfahrens noch die Varianz $\sigma_{w_t}^2$ eingeht. Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß das anpassungsfähige Prognoseverfahren für solche Prozesse optimale Prognosen ergibt, deren zweite Differenzen einen stationären stochastischen Prozeß bilden. Dieser Prozeß läßt sich allgemein durch die Beziehung (11.30) beschreiben. Wenn es gelingt, die Ausgleichsparameter so zu bestimmen, daß sie ihren optimalen Wert annehmen, dann stimmen theoretisch die Prognosefehler mit den Zufallsvariablen des Prozesses

1) Vgl. N. NERLOVE und S. WAGE: Loc. cit., 223.

2) Vgl. P.J. HARRISON: Exponential smoothing. Loc. cit., 833.

dieser zweiten Differenzen überein.¹⁾ Die zweiten Differenzen des stochastischen Prozesses, der durch das Zeitreihenmodell 2 dargestellt wird, sind durch die Beziehung (11.48) gegeben. Da dieser Prozeß der zweiten Differenzen einen stationären Verlauf aufweist, lassen sich durch das anpassungsfähige Prognoseverfahren für seinen Ursprungsprozeß optimale Prognosen gewinnen. Sind aber die Prognosen optimal, dann gilt, wie aus diesen Zusammenhängen folgt, die Gleichung:²⁾

$$e_{t+1,1} + (\alpha + \alpha\beta - 2) e_{t,1} + (1 - \alpha) e_{t-1,1} \\ = y_{t+1} + w_{t+1} - w_t + z_t - 2 z_{t-1} + z_{t-2} \quad (11.60)$$

In dieser Gleichung ist der Prognosefehler $e_{t+1,1}$ enthalten, dessen Erwartungswert durch die entsprechende Bestimmung von α und β ein Minimum sein soll. Bringt man also (11.60) noch in die Form

$$e_{t+1,1} = (2 - \alpha - \alpha\beta) e_{t,1} - (1 - \alpha) e_{t-1,1} + y_{t+1} \\ + w_{t+1} - w_t + z_t - 2 z_{t-1} + z_{t-2} \quad (11.61)$$

dann läßt sich durch die Berechnung des Quadrates dieser Funktion und Bildung der Erwartungswerte in dem daraus gewonnenen Ergebnis ein Gleichungssystem für die Bestimmung der optimalen Werte von α und β aufstellen. Daraus lassen sich dann die folgenden Beziehungen, die den Zusammenhang zwischen den Varianzen des Ursprungsprozesses

-
- 1) Den Beweis für diesen Zusammenhang hat in allgemeiner Form P.J. HARRISON durchgeführt; vgl. P.J. HARRISON: Exponential smoothing. Loc. cit., 825.
 - 2) Die folgende Beziehung (11.60) entspricht dem Ausdruck (7.19) in den Ausführungen P.J. HARRISONS, der die Ableitung der optimalen Parameter durchgeführt hat, und benutzt deshalb dieselbe Schreibweise; vgl. P.J. HARRISON: Exponential smoothing. Loc. cit., 832.

und den optimalen Parametern zeigen, gewinnen:¹⁾

$$\sigma_{z_t}^2 = (1 - \alpha) \sigma_{e_t}^2 \quad (11.62)$$

$$\sigma_{w_t}^2 = (\alpha^2 + \alpha^2 \beta - 2 \alpha \beta) \sigma_{e_t}^2 \quad (11.63)$$

$$\sigma_{y_t}^2 = (\alpha \beta)^2 \sigma_{e_t}^2 . \quad (11.64)$$

Aus diesem Gleichungssystem, in dem die Varianz der Prognosefehler durch $\sigma_{e_t}^2$ enthalten ist, läßt sich erkennen, daß der Wert der optimalen Ausgleichsparameter durch das Verhältnis der Varianzen der Prozesse Z_t , Y_t und W_t untereinander bestimmt wird.

Es gibt noch keine genaue Untersuchung darüber, wie das Verhältnis der Varianzen der beiden Zufallswegeinflüsse und der Beobachtungswerte um den Trend untereinander geschätzt werden könnte, um die optimalen Ausgleichsparameter auch praktisch bestimmen zu können. Wenn aber schon, wie bei den Erörterungen beim Zeitreihenmodell 1 und der einfachen exponentiellen Ausgleichung erwähnt wurde, die Schätzung von zwei verschiedenen Varianzen von Zufallsvariablen aus den Zeitreihenwerten eines Prozesses praktisch nicht durchführbar ist, werden die Schwierigkeiten für den vorliegenden Fall noch größer sein. Deshalb wird man auch hier praktisch auf Erfahrungswerte über die Grenzen der Ausgleichsparameterwerte zurückgreifen. Für α kann man eine Obergrenze von 0,25 annehmen, während das

1) Vgl. P.J. HARRISON: Exponential smoothing. Loc. cit., 830.

Produkt $\alpha \beta$, das in der Beziehung (11.14) für die Schätzung der Steigung der Prognosefunktion herangezogen wird, nicht größer als 0,15 sein sollte.¹⁾

Solche Obergrenzen können der Ausgangspunkt einer möglichst guten Bestimmung der Ausgleichsparameter durch Simulation sein. Dabei wird man versuchen, für eine Menge von Kombinationen verschiedener Ausgleichsparameter die optimalen Werte dadurch anzunähern, indem man die Gewichtungskombination wählt, für die die geringste Quadratsumme der Fehler für eine gegebene Zeitreihe erreicht wird.²⁾

1) Vgl. P.J. HARRISON: Exponential smoothing. Loc. cit., 833.

2) Vgl. G.A. COUTIE, O.L. DAVIES, C.H. HOSSELL, D.W.G.P. MILLAR und A.J.H. MORRELL: Short-Term Forecasting. (Mathematical and Statistical Techniques for Industry, Monograph 2). Edinburgh: Oliver and Boyd Ltd., 1964, S. 8.

12. Die Bedeutung der Eigenschaften von Prognosen auf der Grundlage der exponentiellen Ausgleichung und dem als anpassungsfähiges Prognoseverfahren bezeichneten System für die praktische Anwendung in der Unternehmung

Aus der Darstellung und der theoretischen Untersuchung der exponentiellen Ausgleichung und des mit ihr verwandten anpassungsfähigen Prognoseverfahrens für Zeitreihenmodelle mit konstantem bzw. linearem Trend, den beiden praktisch wohl bedeutsamsten Modellen nichtsaisonaler Absatzzeitreihen¹⁾, lassen sich allgemeine Schlüsse über diese Verfahren im Hinblick auf ihre praktische Verwendbarkeit ziehen. Diese Aussagen folgen unmittelbar aus den vorangegangenen Ausführungen und werden im folgenden kurz zusammengestellt.

Diesen Aussagen kann ein wesentlicher allgemeiner Aspekt der Prognostizierung stochastischer Prozesse vorangestellt werden, der sich indirekt aus den Untersuchungen der Prognoseverfahren auf dem Hintergrund der Theorie stochastischer Prozesse erkennen läßt.

Bei der Untersuchung der auf der exponentiellen Ausgleichung aufbauenden Prognoseverfahren hatte sich gezeigt, daß sie für solche stochastischen Prozesse optimale Prognosen liefern, zu denen sie in einer direkten linearen Beziehung stehen, wie z.B. in den vorliegenden Fällen durch Differenzenbildung nachgewiesen werden konnte. Ganz allgemein kann man darüberhinaus feststellen, daß ein Prognoseverfahren immer dann optimale Prognosen ergibt, wenn es einer linearen Transformation des stochastischen Modells des die Zeitreihe erzeugenden Prozesses entspricht, und es außerdem möglich ist, für die Parameter des Prozesses und damit für die Parameter des Prognose-

1) Siehe hierzu P.J. HARRISON: Exponential smoothing. Loc. cit., 835.

Für die beiden Verfahren hatte sich herausgestellt, daß sie optimale Prognosen für solche stochastischen Prozesse ergeben, deren erstenbzw. zweiten Differenzen sich als ein stationärer Prozeß gleitender Durchschnitte darstellen lassen. Diese Bedingungen werden durch die beschriebenen Zufallswegmodelle von Absatzzeitreihen erfüllt. Wenn auch noch keine empirischen Untersuchungen über ein solches Verhalten von Zeitreihen der Absatzwirtschaft vorliegen, so liegt der Wert dieser Modelle doch in der exakten, auf verteilungstheoretischen Begriffen aufbauenden Beschreibung nichtstationärer Prozesse. Im Vergleich zu den ungenaueren Annahmen über ein lokal gleichbleibendes Verhalten von Prozessen ohne Festlegung der Dauer dieses Zustands und dem Ausmaß seiner Änderung durch Strukturbrüche scheinen die Zufallswegmodelle ein Schritt in die Richtung einer präziseren Erfassung der Struktur solcher Prozesse zu sein.

Damit sind schon einige Vorteile der betrachteten Prognoseverfahren genannt, die auch praktisch von Bedeutung sind. Bedeutsam ist allgemein, daß sich durch sie Prognosen für nichtstationäre Prozesse berechnen lassen. Diese Prozesse kann man anhand bestimmter Eigenschaften stationärer stochastischer Prozesse erkennen. Außerdem wurde bereits der Vorteil angedeutet, daß zu diesen Prozessen Zufallswegprozesse gehören, die anschauliche dynamische Modelle für den Absatz wirtschaftlicher Güter sind.

Ein wesentlicher Vorzug der Verfahren liegt in ihrer Fähigkeit, sich dem wechselnden nichtstationären Verlauf eines

Prozesses anpassen zu können¹⁾²⁾. Diese Anpassungsfähigkeit der Verfahren kann durch die Variation der Ausgleichsparameter leicht gesteuert werden, worin ein wesentlicher Vorzug in der Handhabung der Verfahren zu sehen ist.³⁾

Die theoretischen Erörterungen über die Bestimmung optimaler Ausgleichsparameter führen zu der Aufdeckung der Schwierigkeit, diese optimalen Werte praktisch schätzen zu können. Die theoretische Bestimmung optimaler Parameter ermöglicht es jedoch, anhand von künstlichen Zeitreihen, die aus Zufallswegprozessen stammen, für die das Varianzenverhältnis der in ihnen enthaltenen Zufallsprozesse vorgegeben ist, nachzuweisen, daß die Bestimmung der optimalen Parameter gegenüber Fehlschätzungen in dem Varianzenverhältnis sehr unempfindlich ist. Außerdem zeigt die Prognosefehlerquadratsumme im Bereich des Minimums einen sehr flachen Verlauf, so daß eine Fehlschätzung des optimalen Parameters sich nur gering in einer Vergrößerung des mittleren quadratischen Prognosefehlers auswirkt. Diese Tatsache wurde auch bereits anhand empirischer Untersuchungen überprüft und bestätigt gefunden.⁴⁾ Als eine typische Eigenschaft der Verfahren gibt sie für praktische Zwecke die Gewißheit, daß durch Simulation Approximationen der optimalen Parameter mit ausreichender Genauigkeit gefunden werden können. Außerdem mag

1) Siehe auch C.S. VAN DOBBEN DE BRUYN: Prediction by progressive correction. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 24 (1964), 114.

2) Diese Eigenschaft der exponentiellen Ausgleichung hat D.R. COX dazu bewogen, die Erweiterung eines für einen stationären Markovprozeß optimalen Prognoseverfahrens durch einen exponentiell gewogenen gleitenden Durchschnitt vorzunehmen, um die Flexibilität des Verfahrens gegenüber möglichen langfristigen nichtstationären Einflüssen des Prozesses zu erreichen. Siehe hierzu D.R. COX: Prediction by exponentially weighted moving averages and related methods. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 23 (1961), 414-422, insbesondere 417 f.

3) Ähnlich auch R.G. BROWN und R.F. MEYER: Loc. cit., 678.

4) Siehe hierzu P.R. WINTERS: Loc. cit., 338 f.

es aufgrund dieses Wissens leichter fallen, den gegebenen Empfehlungen über die praktische Festsetzung der Ausgleichsparameter zu folgen. Ebenso mag man aus dieser Eigenschaft entnehmen, daß man für Güter mit gleichartigem Absatzverlauf die gleichen Ausgleichsparameterwerte verwenden kann, ohne einen zu großen Fehler durch die nicht individuelle Bestimmung dieser Größen zu machen.

Weiter von diesen vorwiegend theoretischen Erörterungen entfernt liegen die folgenden praktischen Aspekte, die bei massenhaften, kurzfristigen und häufigen Prognosen von ausschlaggebender Bedeutung sein können.

Da die Verfahren die Prognosen für vergangene Perioden zur Gewinnung neuer Prognosen für die Zukunft fortschreiben, genügt es im Falle der exponentiellen Ausgleichung bei konstantem Trend, nur die letzte Prognose, im Falle des anpassungsfähigen Prognoseverfahrens bei linearem Trend nur die letzten Schätzungen der Koeffizienten der Prognosefunktion, bis zur nächsten Prognostizierung festzuhalten. Für jede einem bestimmten Absatzgut zugeordnete Zeitreihe wird also nur eine minimale Anzahl von Daten zur Aufrechterhaltung des Verfahrens benötigt, aus denen sich durch Hinzuziehung des jeweils neu beobachteten Zeitreihenwertes neue Prognosen bilden lassen. Dadurch ergibt sich ein klarer Kostenvorteil durch eine geringe Belastung externer Speicher der Datenverarbeitungsanlage gegenüber solchen Verfahren, die sämtliche oder einen Teil der beobachteten Zeitreihenwerte eines Absatzgutes verlangen.¹⁾ Die Sparsamkeit der Verfahren liegt außerdem in der Einfachheit der in nur geringer Zahl auszuführenden Rechenoperationen. Dadurch entsteht nur ein geringer Programmaufwand für eine elektronische Datenverarbeitungsanlage. Damit verbunden ist gleichzeitig eine nur geringe Beanspruchung des Arbeitsspeichers einer solchen Anlage und eine große Verarbeitungsgeschwindigkeit.

1) Ähnlich auch R.G. BROWN und R.F. MEYER: Loc. cit., 677, siehe ebenso P.R. WINTERS: Loc. cit., 325.

Ein praktisch bedeutsamer Vorteil der Prognoseverfahren liegt, wie sich aus den unterschiedlichen Begründungen des Grundprinzips der exponentiellen Ausgleichung entnehmen läßt, in ihrer leichten Verständlichkeit, die wesentlich zur Einführung ihrer Verwendung in die Absatzplanung beitragen kann.¹⁾

Es läßt sich zum Schluß noch anführen, daß Vergleiche von kurzfristigen und mittelfristigen Prognosen, die durch die exponentielle Ausgleichung bzw. das anpassungsfähige Prognoseverfahren gewonnen wurden, mit Prognosen, die durch ungewogene gleitende Durchschnitte für dieselben empirischen oder künstlich erzeugten Zeitreihen durchgeführt wurden, ergeben haben, daß die exponentielle Ausgleichung praktisch in ihrer Genauigkeit und Zuverlässigkeit dem letzteren Verfahren ebenbürtig und bei kurzfristigen Prognosen leicht überlegen ist.²⁾ Diese praktischen Erfahrungen unterstreichen zusammen mit den angeführten Vorzügen die Eignung der betrachteten Verfahren zur Prognostizierung von Zeitreihen aus der Absatzwirtschaft einer Unternehmung.

1) Ähnlich auch P.J. HARRISON: Exponential smoothing. Loc. cit., 838.

2) Vgl. hierzu R.M. KIRBY: Loc. cit., 202-210.

LITERATURHINWEISE

1. Bücher:

- ANDERSON, O.: Probleme der statistischen Methodenlehre in den Sozialwissenschaften. 3. Auflage. Würzburg: Physica-Verlag, 1957, 358 S.
- BROWN, R.G.: Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series. 2nd Printing. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1964, 468 S.
- BROWN, R.G.: Statistical Forecasting for Inventory Control. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959, 232 S.
- COUTIE, G.A., DAVIES, O.L., HOSSELL, C.H., MILLAR, D.W.G.P. und MORRELL, A.J.H.: Short-Term Forecasting. (Mathematical and Statistical Techniques for Industry, Monograph 2). Edinburgh: Oliver and Boyd Ltd., 1964, 36 S.
- CRAMER, H.: Mathematical Methods of Statistics. Princeton: Princeton University Press, 1946, 575 S.
- DOOB, J.L.: Stochastic Processes. 2nd Printing. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1959, 654 S.
- EZEKIEL, M. und FOX, K.A.: Methods of Correlation and Regression Analysis. 6th Printing. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1967, 548 S.
- FISZ, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. (Hochschulbücher für Mathematik, herausgegeben von H. Grell, K. Maruhn und R. Rinow, Band 40, 3., durchgesehene Auflage). Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1965, 551 S.
- GOLDBERG, S.: Differenzengleichungen und ihre Anwendung in Wirtschaftswissenschaft, Psychologie und Soziologie. München: R. Oldenbourg Verlag, 1968, 366 S.
- GUTENBERG, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Band II: Der Absatz. 5. Auflage. Berlin: Springer-Verlag, 1962, 481 S.
- HOLT, C.C., MODIGLIANI, F., MUTH, J.F., SIMON, H.A.: Planning Production, Inventories, and Work Force. 4th Printing. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1965, 419 S.
- JENKINS, G.M. und WATTS, D.G.: Spectral Analysis and its Applications. San Francisco: Holden-Day, Inc., 1968, 525 S.

- JOHNSTON, J.: Econometric Methods. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1963, 300 S.
- JORDAN, C.: Calculus of Finite Differences. 2nd Edition. New York: Chelsea Publishing Company, 1950, 652 S.
- KELLERER, H.: Theorie und Technik des Stichprobenverfahrens. (Einzelschriften der Deutschen Statistischen Gesellschaft, Heft Nr. 5), 3. Auflage. München, 1963, 211 S.
- KENDALL, M.G. und STUART, A.: The Advanced Theory of Statistics, Volume 3: Design and Analysis, and Time-Series. 2nd Edition. London: Charles Griffin & Company Ltd., 1968, 557 S.
- MENGES, G.: Grundriß der Statistik. Teil 1: Theorie. Opladen: Westdeutscher Verlag GmbH, 1968, 374 S.
- PRILLWITZ, H.: Prognosefunktionen für Polynome nach der Methode der exponentiellen Gewichtung und nach der Methode der kleinsten Quadrate. (Berichte aus dem Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik und aus dem Institut für Angewandte Statistik der Freien Universität Berlin, herausgegeben von H. Münzner und W. Wetzels, Heft 2). Würzburg: Physica-Verlag, 1967, 76 S.
- STRUBECKER, K.: Einführung in die höhere Mathematik, Band I: Grundlagen. 2., verbesserte Auflage. München: Oldenbourg-Verlag, 1966, 825 S.
- TRUX, W.R.: Einkauf und Lagerdisposition mit Datenverarbeitung. München: Verlag Moderne Industrie, 1968, 527 S.
- WIENER, N.: Extrapolation and Interpolation of Stationary Time Series. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1949, 163 S.
- WOLD, H.: A Study in the Analysis of Stationary Time Series. 2nd Printing. Uppsala: Almqvist & Wiksells, 1954, 236 S.
- YAMANE, T.: Statistics: An Introductory Analysis. 2nd Edition. New York: Harper and Row, 1967, 919 S.

2. Aufsätze und Artikel:

- BARNARD, G.A.: New methods of quality control. Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 126 (1963), 255-258.
- BOSSONS, J.: The effects of parameter misspecification and non-stationarity on the applicability of adaptive forecasts. Management Science, 12 (1966), 659-669.
- BOX, G.E.P. und JENKINS, G.M.: Further contributions to adaptive quality control: simultaneous estimation of dynamics: non-zero costs. Bulletin of the International Statistical Institute, Proceedings of the 34th Session, 40 (1963), 943-974.
- BOX, G.E.P. und JENKINS, G.M.: Some statistical aspects of adaptive optimization and control. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 24 (1962), 297-331.
- BROWN, R.G. und MEYER, R.F.: The fundamental theorem of exponential smoothing. Operations Research, 9 (1961), 673-687.
- COX, D.R.: Prediction by exponentially weighted moving averages and related methods. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 23 (1961), 414-422.
- VAN DOBBEN DE BRUYN, C.S.: Prediction by progressive correction. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 24 (1964), 113-121.
- D'ESOPPO, D.A.: A note on forecasting by the exponential smoothing operator. Operations Research 9 (1961), 680-687.
- GODFREY, M.D.: The statistical analysis of stochastic processes in economics. Kyklos, 20 (1967), 373-386.
- HARRIS, B.: Spectral Analysis of Time Series. (Proceedings of an Advanced Seminar, Conducted by the Mathematics Research Center, United States Army and The Statistics Department at the University of Wisconsin, Madison, October 3-5, 1966), Artikel: BOX, G.E.P., JENKINS, G.M. und BACON, D.W.: Models for forecasting seasonal and non-seasonal time series. 271-311, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1967, 319 S.
- HARRISON, P.J.: Exponential smoothing and short-term sales forecasting. Management Science, 13 (1967), 821-842.
- HARRISON, P.J.: Short-term sales forecasting. Journal of the Royal Statistical Society, Series C, 14 (1965), 102-139.

- KIRBY, R.M.: A comparison of short and medium range statistical forecasting methods. Management Science, Series B, 13 (1966), 202-210.
- LÜTTGEN, H.: Exponential smoothing für die Prognoserechnung bei exponentiell fallendem Trend. Ablauf- und Planungsforschung, Band 6, 2 (1965), 323-335.
- MATT, G.: Bestimmung statistisch gesicherter Koeffizienten bei der exponentiellen Ausgleichung (Exponential Smoothing). Unternehmensforschung, Band 10, 1 (1966), 15-31.
- MENGES, G.: Ökonometrische Prognosen. Statistische Hefte, Internationale Zeitschrift für Theorie und Praxis, Neue Folge, 2 (1967), 18-31, Fortsetzung 87-98.
- MEYER, R.F.: An adaptive method for routine short-term forecasting. (Proceedings of the 3rd International Conference on Operational Research, Oslo). London: English Universities Press Ltd., 1964, 882-895.
- MUTH, J.F.: Optimal properties of exponentially weighted forecasts. Journal of the American Statistical Association, 55 (1960), 299-306.
- NERLOVE, N. und WAGE, S.: On the optimality of adaptive forecasting. Management Science, 10 (1964), 207-224.
- PRILLWITZ, H.: Die Varianz der Prognose bei exponentieller Gewichtung der Zeitreihen. Metrika 9 (1965), 61-68.
- RAY, W.D. und WYLD, C.: Polynomial projecting properties of multiterm predictors, controllers in non-stationary time series. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, (1966), 144-158.
- THEIL, H. und WAGE, S.: Some observations on adaptive forecasting. Management Science, 10 (1964), 198-206.
- WEDEKIND, H.: Über einige praktische Anwendungen des optimalen adaptiven Vorhersagens. Ablauf- und Planungsforschung, 4 (1966), 175-186.
- WEICHSELBERGER, K.: Über eine Theorie der gleitenden Durchschnitte und verschiedene Anwendungen dieser Theorie. Metrika, 8 (1964), 185-230.
- WETZEL, W.: Exponentiell gewichtete, univariable Prognosemodelle. Jahrbuch für Nationalökonomie und Statistik, 181 (1968), 3-50.

WETZEL, W.: Univariable mikro-ökonomische Prognosemodelle mit exponentieller Gewichtung der Beobachtungswerte. Metrika, 6 (1963), 155-186.

WINTERS, P.R.: Forecasting sales by exponentially weighted moving averages. Management Science, 6 (1960), 324-342.

Lebenslauf

Wolfgang Klein	4401 Wolbeck, Hiltruper Str.1
geboren am	30.10.1939
Geburtsort	Münster (Westf)
Staatsangehörigkeit	deutsch
Eltern	Kaufmann Carl-Franz Klein und Ehefrau Klara, geb. Merkentrup
Schulen	1946 bis 1951 Volksschulen in Rinkerode und Münster 1951 bis 1960 Städtisches Ratsgymnasium in Münster
Reifeprüfung	3.3.1960
Bundeswehr	1960 bis 1961
Studiengang	Sommersemester 1960 bis Wintersemester 1960/61: Studium der Mathematik und Physik in Münster Sommersemester 1962 bis Wintersemester 1963/64: Studium der Betriebswirt- schaftslehre in Münster Sommersemester 1964: Studium der Be- triebswirtschaftslehre in München Wintersemester 1964/65 bis Winterse- mester 1966/67: Studium der Betriebs- wirtschaftslehre in Münster.
Studienabschluß	Diplom-Kaufleute-Prüfung am 25.4.1967
Berufspraxis	Seit Juli 1967 Tätigkeit in der Ab- teilung "Elektronische Datenverarbei- tung" der Westfälischen Provinzial- Feuersozietät in Münster.

